様　式　C－19、F－19－1、Z－19　(共通)

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 29 年　 6 月　 9 日現在

機関番号： １４６０２
研究種目： 基盤研究(C)（一般）
研究期間： 2014～2016
課題番号： ２６４０００８８

研究課題名（和文） 曲面群の指標多様体の幾何的分解と力学系的分解

研究課題名（英文） The geometric and dynamical decomposition of the character variety of surface groups

研究代表者
山下　靖（Yamashita, Yasushi）

奈良女子大学・自然科学系・教授

研究者番号：７０２３９９８７

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　1,800,000円

研究成果の概要（和文）：2次元および3次元の多様体の幾何構造として、双曲幾何構造は重要である。この構造を理解するため、２次元多様体の基本群の指標多様体の研究を行った。特に閉３次元多様体に対して双曲幾何を用いた新しい意味での体積の定義を与えるとともに、この不変量の基本的な構造について研究を行った。さらに、多様体の基本群に代表される無限離散群がGromovの意味で双曲的になるための条件を、CAT(0)立方複体を用いて与えた。

研究成果の概要（英文）：The hyperbolic geometry is important in studying the geometry of two and three dimensional manifolds. To understand this geometry, we studied the character variety of the fundamental group of a surface. In particular, we defined a new kind of volume for closed three dimensional manifolds using hyperbolic geometry, and studied the basic structure of this invariant. Moreover, using CAT(0) cube complexes, we found conditions for infinite discrete groups, such as fundamental groups of manifolds, to became hyperbolic in the sense of Gromov.

研究分野： 位相幾何学

キーワード： 双曲幾何学

１．研究開始当初の背景

指標多様体 X = Hom(π,SL(2,C)//SL(2,C) の要素は，対応する表現の像が SL(2,C)の中で離散群となっている場合には曲面の双曲幾何構造を与えるため，X を離散表現からなる部分 D とそうでないものからなる部分 D’の２つに分解して考えることはこれまでよく行われてきた．例えば，タイヒミュラー空間は群が SL(2,R)のときの D の連結成分と同一視される．群が SL(2,C)のときには D はクライン群の変形の空間であり，これついて Thurston が 1980 年代に提出した一連の主要な予想が近年になって解決されるなど，現在活発な研究が進行中である．この分解 X=D∪D’は「幾何的分解」と呼ばれ，特に曲面が穴あきトーラスの場合には Jorgensen による先駆的な研究がある．

一方，X を写像類群の作用が固有不連続に作用する部分 P とそうでない部分 P’に分ける「力学系的分解」も考えられる．タイヒミュラー空間上には写像類群が固有不連続に作用するので，素朴には幾何学的分解と力学系的分解は一致するようにも思える．しかし驚くべきことに近年 Minsky により定義された原始安定と呼ばれる X のクラスは P の部分集合でありながら D’の要素も含むことが示され，上の素朴な考えの反例を与えると共に近年注目が高まっている．曲面が１つ穴あきトーラスの場合には，指標多様体上の写像類群の作用に関連して Bowditch, Tan-Wang-Zhang らがフックス群の擬等角変形および McShane の等式を動機として Q 条件と呼 ばれる条件を導入し，研究を行ってきている．McShane の等式は近年 Mirzakhani によるモジュライ空間の Weil-Peterson 体積の計算で本質的な役割を果たすなど，発展が期待されている．しかしこの分野はまだまだ不明な点も多く，Minsky は，与えられた X の要素が原始安定かどうかの計算機アルゴリズムの構築や, 原始安定性と Q 条件の関係などが, 重要な未解決問題として挙げられている．さらに離散性と Q 条件の関係も未解決であるが，Bowditch は興味深い予想を提出している．本研究課題を進めることにより，計算機実験により離散性・原始安定性・Q 条件の比較を行うことが出来，今後のこれらの研究において大きな進展が期待できる．

これまで本研究代表者は，近畿大学の秋吉宏尚氏, 広島大学の作間誠氏, 大阪大学の 和田昌昭氏らと上記 Jorgensen 理論の精密化の研究を近年行ってきた．加えて，大阪市立大学の小森洋平氏，東北大学の須川敏幸氏および上記の和田氏らと離散性判定アルゴリズムを得た．また，シンガポール国立大学の Tan Ser Peow 氏と，Q 条件判定アルゴリズムを研究し，計算機実験をこれまで行ってきている．また，原始安定性に関しては，曲面が１つ穴あきトーラスの場合において，計算機実験をこれまで行ってきている．

２．研究の目的

曲面Σの基本群πからリー群 G への表現全体の空間 Hom(π,G)には, G が共役により作用する．この作用による幾何学的不変式論の意味での商空間 X=Hom(π,G)//G を指標多様体という．X を，表現の像が G の離散部分群になる領域とそうでない領域に分割すると，前者はΣの幾何構造の変形の空間とみなすことができ，重要な研究対象である．（幾何的分解）また，X にはΣの写像類群が自然に 作用し，この作用の複雑さ（エルゴード性）によっても X は２つに分解される．（力学系的分解）２つの分解はタイヒミュラー空間論およびクライン群論において注目を集めつつあるが，両者の関係は未解決問題となっている．本研究課題ではこれら２つの関係を解明することを研究目的とする．

３．研究の方法

原始安定性判定アルゴリズムの開発と計算機上での実装および計算機実験を行う．判定アルゴリズムの形は，ある一つの必要十分条件を計算機で計算するのではなく，表現が原始安定であることを示すための計算機上で計算可能な十分条件および，表現が原始安定でないことを示すための計算機上で計算可能な十分条件の２つを与えて，そして入力に対してこの２つのどちらか１つの成立が確認できればその結果を出力，どちらも成立しない場合は，「不明」という結果を出力するような形になる．種数１は既にできているので，以下の２つを行う必要がある．

(a) 上記アルゴリズムを種数２以上の場合に拡張する．

(b) 入力が原始安定でないことを示すための条件を与える．

(a)に関しては，原始語とよばれる自由群の元の部分語に関する禁止 factor の研究により拡張を行う．(b)の方の十分条件については，Lubotzky による redundant 条件を使用する方法と，群の原始元に 楕円的または放物的な元が含まれているのかどうかを探索する方法があり，まずは後者を中心に検討する．この方法については, 本研究代表者は Tan 氏と共に Q 条件を研究する際に，類似の問題を研究してきており，Tan 氏との議論を積極的に進める．また，実装後の計算機実験においても，Q 条件の専門家である Tan 氏との議論は，両者の比較に非常に有効である．さらに, Series 氏も原始安定性の研究を近年行って いるとともに，アルゴリズムに関する造詣が深く，議論を行うことにより研究を進展させる．

また，本研究に関連して，近畿大学の秋吉氏らは「幾何的分解」に関してのアルゴリズムの開発を 進めており，それらが原始安定性にも応用できないか，同じく幾何的分解に関する専門家である広島 大学の作間誠氏と共に関連した議論を行う．

４．研究成果
(1) 任意の閉３次元多様体は３次元球面の分岐被覆として得られることは古典的によく知られている．特に分岐点の集合として双曲絡み目をとることが可能である．これを利用して，閉３次元多様体の複雑さを測る指標とみなすことができる絡み目体積という不変量を，本研究代表者は米国アーカンソー大学のヨアブリエック氏との共同研究において定義した．より具体的には，閉３次元多様体が与えられたときに，それと同相な球面上の双曲絡み目で分岐する分岐被覆をすべて考え，それぞれの双曲絡み目の補空間の双曲体積と被服度との積の下限によって，絡み目体積を定義した．この不変量とサーストンによる双曲デーン手術との関連について，cosmetic surgery と呼ばれる手法を用いて研究を行った．

トーラスカスプを１つだけ持つ有限体積双曲 3 次元多様体 M を考える．M の双曲デーンフィリングは有理数をパラメータに持ち，この操作で得られる多様体を M(p/q)と書くことにする．有理数はその連分数展開から定まる Farey depth を持つ．M(p/q)の絡み目体積と p/q の Farey depth との間の不等式を与えることに成功した．

証明は，3 次元多様体の幾何的な分解を用いて行う．古典的によく知られた事実として，３次元多様体はそれに埋め込まれた球面で標準的に分解され，その後の各成分において埋め込まれたトーラスで（標準的に）分解される．この分解から木構造を構成し，木構造に関する数学的帰納法の議論を行うことにより，上記の命題の証明を行うことに成功した．

(2) 幾何学的群論における最も重要なクラスは，Gromov による「双曲群」で，このクラスでは既存の双曲幾何学の様々なアイディアが働くことが知られている．群が階数２の自由アーベル群を 部分群として含む場合は，これは双曲群にはならないことが知られていたが，その逆（の類似）が成立するのかどうかは現在なお未解決で，幾何学的群論でもっとも重要な問題の１つである．ただし，一般の離散群を対象にこのような強い命題の証明を目指すのは通常は困難である．そこで，離散群全体ではなく，ある程度良い性質を持った離散群のサブクラスを設定し，それらを対象に研究を進めることが必要となる．サブクラスとしては古典的には small cancellation 群などのように群の組み合わせ構造を利用したものや，多様体やある種の複体の基本群として得られる（位相）幾何的な構造を利用したものなどがよく知られていて，研究も進んでいる．

ここでは計算機科学に由来する概念であるオートマトンという計算モデルを利用した離散群のサブクラスである「オートマティック群」を用いて，この問題に対する部分的な解答を与えた．このクラスは本質的にほとんどの 3 次元多様体の基本群を含んでいることが分かっているので，3 次元多様体論への応用も期待することができると同時に，その定義から計算機との相性がよいため，その方向でも応用が期待できる興味深い対象となっている．ここではスペースの都合で定理をそのままの形でのべることはできないが，ある程度弱い仮定の下で，階数 2 のアーベル群を想起させるような任意の大きさの格子状の構造が群のケーリーグラフに埋め込まれていることを見出した．

この格子構造は幾何的には階数２の自由アーベル群と同じような形をしているが，そのうえの群演算がどのようなものかについては何も述べることができていない，この問題を乗り越えるため，本研究では CAT(0) cube complex という，近 年 Agol-Wise らによりバーチャルハーケン予想の解決でも用いられたある意味で負曲率の複体の基本群として得られるような離散群についての考察を行った．特に，上記のバーチャルハーケン予想で大事な役割を果たす「special」と呼ばれるような複体の基本群を含むようなクラスに対して，格子的な組み合わせ構造から階数 2 のアーベル群の構造を引き出すことに成功した．

ただし，現状ではいくつかの本質的とは思えない仮定が若干残った形での論文発表となっているため，これらを取り除いた定理を証明することが今後の課題となる．

(3) 有限生成離散群の性質を調べる基本的な方法として，その群のある表示に関する growth function と呼ばれるものがある．群の生成系を一つ固定する．すると，群の元それぞれについて，その元の表示を与える生成元の列の長さの最小値を考えることにより，元の語長が定義される．語長がちょうど n であるような元の個数を n 次の係数とするような１変数の形式べき級数を growth series と呼ぶ．興味深いことに，実際に研究されている多くの離散群において，growth series は有理式として表示される（そのテイラー展開が元の growth series になる）ことが知られていて，これをここでは growth function と呼んでいる．

ただし群が与えられた際に具体的な growth function の有理式表示を求める事は一般には難しく，その表示を求めること自体が一つの研究となるケースもある．双曲コクセター群と呼ばれる群に対しては，その定義に使用される標準的な生成系に対する growth function の有理式表示があたえられていて，現在でも活発に研究が進められている．それ以外にも，群が双曲的である場合には有理式表示持つことが知られている．

ここでは 3 次元多様体論において重要な役割を果たすトーラス結び目の基本群の growth function の計算を行った．これらは

双曲的ではないため，そもそも有理式表示を持つかどうかも明らかではなかったが，標準的な2元生成の表示における有理式表示を与えることに成功した．その応用として，この表示における群の増大度が Perron 数になっていることをしめした．これはこれまでに計算が行われている閉曲面群や双曲コクセター群との類似を示すもので，非常に興味深い結果といえる．

さらに，これらの結果はより一般的なある種のザイフェルト多様体の基本群にまで結果を拡張できることが分かった．その場合においても，群の増大度が Perron 数であるということを示すことができた．

５．主な発表論文等
（研究代表者，研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計３件）

① Yo'av Rieck and Yasushi Yamashita. Cosmetic surgery and the link volume of hyperbolic 3-manifolds. Algebr. Geom. Topol., 16(6):3445–3521, 2016.査読有
DOI: 10.2140/agt.2016.16.3445

② Yoshiyuki Nakagawa, Makoto Tamura, and Yasushi Yamashita. Non-hyperbolic automatic groups and groups acting on CAT(0) cube complexes. Internat. J. Algebra Comput., 24(6):795–813, 2014.査読有
DOI: 10.1142/S0218196714500349

③ Yasushi Yamashita. Non-hyperbolic automatic groups and groups acting on CAT(0) cube complex. 数理解析研究所講究録, 1936:11 - 14, 2014. Complex analysis and topology of discrete groups and hyperbolic spaces 査読無
http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/1936-03.pdf

〔学会発表〕（計６件）

① 山下靖. ベアス埋め込みの可視化について, 2016.9.3. 函数論サマーセミナー, 山梨県笛吹市 ホテル石風.

② Yasushi Yamashita. The geometric and dynamical decompositions of the character veriety of the free group of rank two, 2015.7.2. Group representations in dynamical systems and geometry, Luminy, France.

③ 中川義行，田村誠，山下靖. トーラス絡み目群の有理増大度関数, 2014.9.28. 日本数学会秋季総合分科会, 広島大学.

④ 山下靖. The diagonal slice of SL(2,C)-character variety of free group of rank two, 2014.6.12. 複素射影構造, bumping 研究集会, 大阪大学.

⑤ 山下靖. Visual hyperbolic geometry, 2014.5.23. Kobe studio seminar, 神戸大学.

⑥ Yasushi Yamashita. On pseudomodular groups, 2014.4.28. Knot theory: algorithms, complexity and computation, NII shonan meeting seminar 043.

〔その他〕
ホームページ等
http://vivaldi.ics.nara-wu.ac.jp/~yamashita/

６．研究組織
(1)研究代表者

山下　靖　（YAMASHITA Yasushi）
奈良女子大学・自然科学系・教授
研究者番号：70239987