1版

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　元 年　 ５ 月　 ７ 日現在

機関番号：２２６０４
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2014～2018
課題番号：２６４０００９３
研究課題名（和文）3次元幾何多様体の微分同相群の研究

研究課題名（英文）Study of diffeomorphisms on geometric 3-manifolds

研究代表者
相馬　輝彦（Soma, Teruhiko）

首都大学東京・理学研究科・教授

研究者番号：５０１５４６８８

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　3,300,000円

研究成果の概要（和文）：本研究の主要な課題は，3次元多様体上の微分同相群の構造を研究することにある．そのため，2次元および3次元微分同相写像を離散力学系的な見地から調べた．特に，このような写像による前方軌道の遊走領域に関し，F. Takens の予想の肯定解を含むいくつかの新しい結果を得た．これらの研究は，軌道の複雑の研究であり，統計的な見地から軌道の様相を推測することが不可能な場合が難しい場合が珍しいことではないことを，理論的な立場から示している．

研究成果の学術的意義や社会的意義
この研究は，純粋に数学的な見地からの研究であるが，ある種の運動している物体の軌道を推測することが難しいことを理論的に説明してるとも言える．

研究成果の概要（英文）：The main aim of this research project is to study structures of diffeomorphisms on 3-dimensional manifolds. To accomplish it, we investigated 2 and 3-dimensional diffeomorphisms from dynamical point of view. In fact we have obtained some new results on the existence of wandering domains including the affirmative answer of F. Takens conjecture. This is a research concerning on the complexity of orbits. This shows theoretically that it is often impossible to predict the orbits from statistical point of view.

研究分野：位相幾何学

キーワード：3-manifold　dynamical systems　diffeomorphism

1．研究開始当初の背景

W. Thurston による 3 次元多様体の幾何化予想 (1982) は，3 次元多様体論における中心的なテーマであった．この予想は，Poincaré 予想をその一部として含む壮大なものであったが，2003 年に G. Perelman が肯定的に解決した．幾何化予想の解決を契機に，3 次元多様体論の研究はその方向を大きく変え，分類問題から 3 次元多様体の特性の研究へと推移していくことなる．実際，3 次元閉多様体は一意的な連結和・トーラス分解を持ち，その各因子には幾何構造が入ることが分かったので，3 次元多様体の研究の多くは，幾何構造を持つ場合の研究に帰着できるようになった．これは，3 次元多様体の研究がしやすくなったことを意味するが，多様体の詳細な構造がすべて明らかになった訳ではなく，多くの未解決問題が残っている．

このような状況の下で，幾何構造を持つ 3 次元閉多様体 M の微分同相群 $\mathrm{Diff}(M)$ の構造を明らかにすることを研究テーマとした．しかし，M が双曲多様体または底空間が双曲軌道体であるザイフェルト多様体以外では，双曲幾何の主要な道具が使えないという難しさにさに直面した．そこで，$\mathrm{Diff}(M)$ の構造を双曲的手法のみではなく離散力学系の手法も使って研究することにした．

2．研究の目的

本研究課題は,「一般化された Smale 予想」であった．S. Smale (1959) は，包含写像 $i : \mathrm{isom}(S^2) \longrightarrow \mathrm{Diff}(S^2)$ はホモトピー同値であることを証明した．さらに，3 次元球面 S^3 に対しても同様の結果が成り立つと予想した．これが，オリジナルの Smale 予想である．この予想は，A. Hatcher (1983) によって肯定的に解決された．一般化された Smale 予想は「任意の 3 次元幾何閉多様体 M に対し，恒等写像成分間の包含写像 $i_0 : \mathrm{isom}_0(M) \longrightarrow \mathrm{Diff}_0(M)$ はホモトピー同値写像であろう」という主張である．3 次元球面以外で最初に Smale 予想が解決したのは，Haken 閉多様体である．これは，Hatcher (1976) と N.V. Ivanov (1979) によって独立に証明された．双曲多様体に関する Smale 予想を解決したのは，D. Gabai (2001) である．D. McCullough 氏と本研究代表者 (2013) は，$\widetilde{SL}_2$-閉多様体に対する Smale 予想を肯定的に解決した．$\mathbb{S}^3$-構造を持つ多様体に関する Smale 予想に関しては，S. Hong-J. Kalliongis-McCullough-J.H. Rubinstein (2012) によって部分解が得られているが，十分とは言えない．

本研究目的を達成するために，2 次元または 3 次元閉多様体 M に対し，ホモトピー型という微分同相群 $\mathrm{Diff}(M)$ の大域的性質と，力学系の立場からみた局所的性質との関連性を研究する．さらにそれに関係する双曲幾何の課題として，無限体積を持つ双曲 3 次元多様体の構造を研究する．

3．研究の方法

(1) 3 次元多様体 M が幾何構造の一つである Nil 構造を持つ場合を考える．多様体が Haken 多様体ではない場合，M の正則有限被覆空間で Haken 多様体となるものがある．特に，被覆変換群が位数 3 の有限巡回群の場合が重要である．このような被覆空間は非圧縮トーラスを持つが，このトーラスと被覆変換トーラスの作る 2 重点集合，3 重点集合を調べる．

(2) ヒストリー的挙動を持つ微分同相写像の存在に関する F. Takens (2018) の問題の解答となるような 2 次元微分同相写像の持続的クラスを見つける．その際，E. Colli と E. Vargas (2001) によって与えられた 2 次元微分同相写像のモデルを精密化する．彼らの結果と，Newhouse の理論を組み合わせることによって，Takens の最終問題 (2008) となるような 2 次元微分同相写像の持続的クラスを見つける．

(3) エンディング・ラミネーション定理を含むような無限体積 3 次元双曲多様体の剛性定理を，新しい側面から考える．特に，体積発散を比較する方法の有効性を検証する．その際，大鹿健一氏

（学習院大学）と共同研究で得られたクライン群の幾何的極限の分類定理と，本研究代表者が既に発表している有界コホモロジーの基本類による剛性定理の両方を利用する．

4．研究成果

本研究課題の研究成果は，力学系関係の結果と双曲幾何関係の結果に分けられる．成果の主要部を占める力学系関係の研究から説明する．

(1) **力学系関係**　X を距離空間とし，$f : X \longrightarrow X$ を連続写像とする．$x \in X$ を起点とする前方軌道 $O_f^+(x) = \{x, f(x), f^2(x), \ldots\}$ がヒストリー的挙動 (hisitoric behavior) を持つとは，Birkhoff 平均

$$\delta_{n,f;x} = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\delta_{f^i(x)}$$

が弱位相の意味で極限値を持たないことをいう．ただし，$\delta_{f^i(x)}$ は 1 点集合 $\{f^i(x)\}$ を台とする X 上の Dirac 測度とする．ヒストリー的挙動の概念は，Ruelle (2001) によって導入されたものである．X がコンパクト距離空間のとき，Birkhoff のエルゴード定理より,「X 上に f-不変な有界測度 μ が存在するならば，その測度に関し，ほとんど全ての点 $x \in X$ の前方軌道はヒストリー的挙動を持たない」ことがいえる．Birkhoff の定理は，時間平均の極限が μ-測度に関し確率 1 で存在するという主張である．しかし，不変測度は物理学的な見地からは必ずしも自然な測度とはいえない．特に，X が多様体のような場合は，Lebesgue 測度が最も自然な測度である．このような視点から，Takens (2008) は次の問題（現在では Takens の最終問題と呼ばれる）を提案した．

「多様体上の微分同相写像の持続的クラスで，その任意の要素がヒストリー的挙動をもつものは存在するのか？」

本研究代表者は桐木紳氏（東海大学）との共同研究で，M が 2 次元閉曲面の場合，この問題に対する解答を得た．さらにこの論文で構成した微分同相写像により，非自明な遊走領域の存在に関する Colli-Vargas の予想 (2001) も同時に解決することができた．具体的には次の結果を証明した．

「ホモクリニック接触をもつ 2 次元微分同相写像は，非自明な遊走領域をもつ微分同相写像で任意に近似できる．さらに，遊走領域上の点を初期点とする軌道はヒストリー的挙動を持つ.」

ただし，M の連結開集合 D が，f の遊走領域であるとは，相異なる任意の整数 m, n に対し，$f^m(D) \cap f^n(D) = \emptyset$ が成り立つことをいう．本研究代表者と桐木氏は，2015 年 3 月，Imperial College London の S. van Strien 教授，D. Turaev 教授のもとを訪ね，上記の成果を説明し両教授からのアドバイスを受けた．さらに，2016 年 3 月，サンパウロ大学の E. Coli 教授，E. Valgas 教授もとを訪ね研究情報を交換をした．これらの成果を反映させ，結果をまとめたものが論文④である．また，京都大学等の力学系セミナー (2015 年 7 月) やサンパウロ大学力学系セミナーでこの結果に関する講演をした．

桐木氏，Ming-Chia Li 氏（国立交通大学，台湾）との共同研究で，3 次元多様体上の幾何的ローレンツ・フローに関し，ヒストリー的挙動の初期点集合で residual なものが存在することが分かった．この初期点集合は，V. Araujo (2009) 等の研究で，ルベーグ測度は零であることが知られているので，それとは対照的な結果である．この結果を，論文⑥としてまとめ，2016 年 1 月に力学系研究集会（日本大学軽井沢研修所）で発表した．

桐木氏，中野雄史氏（当時：北見工業大学特任助教，現在：東海大学講師）との共同研究で，ヘテロ次元サイクルをもつ 3 次元微分同相写像が，非自明な遊走領域を持つ微分同相写像で任意に近似されるための十分条件を得た．証明の主要なアイデアは，虚数固有値をもつサドル点に同伴す

るヘテロ次元サイクルを持つ微分同相写像が，J. Tatjer (2001) の定義した一般化されたホモクリニック接触をもつ微分同相写像で近似できるという定理を証明することにあった．この結果は，論文⑤として発表した．

桐木氏，橋本忍氏（首都大学東京大学院生）との共同研究で，サドル焦点を持つ 3 次元微分同相写像の moduli の研究をし，適当な条件の下で，サドル焦点におけるこの写像の固有値が moduli であることが証明できた．この結果は，論文③として発表した．

桐木氏，中野氏との共同研究で，非独立同分布なランダム力学系おいて，ヒストリー的挙動を持つ軌道を許容する微分同相写像の具体的な例を構成した．一方，V. Araujo の論文 (2000) により，独立同分布のランダム力学系では同様の結果は成り立たないことが分かっている．したがって，この共同研究により，非独立同分布の場合，Araujo の結果に対応する結果が成り立たないことが分かった．この共同研究は，論文①として発表した．

その他には，桐木氏，中野氏および Bablo Barrientoss 氏，Artem Raibekas 氏（何れもブラジル，ニテロイ大学助教授）との共同研究で，3 次元以上の多様体上の微分同相写像の generic な族で，次の性質を持つものの存在が証明できた．

「2 個のヘテロ次元周期点を含むホモクリニック集合に対し，residual な部分集合で，その要素を始点に持つ軌道はヒストリー的挙動を持つものが存在する.」

この結果は，現在「Historic behavior in non-hyperbolic homoclinic classes」という題目で論文を作成中であり，2019 年度中に投稿する予定である．

【研究成果から導かれた今後の課題】ヒストリー的挙動とは，軌道の複雑さを表現するものであるが，それをさらに精密化したのが，Berger (2017) よって提案された創発性 (emergence) の概念である．$\mathbb{P}(M)$ を，閉多様体 M 上の確率測度全体の空間であり，弱収束位相を持つとする．連続写像 $f: M \longrightarrow M$ に関するスケール $\varepsilon > 0$ の創発性とは，

$$\limsup_{n\to\infty} \int_M \min_{1\le i\le N} d_{W^1}(\delta_{n,f;x}, \mu_i)\, d\,\mathrm{Lip} \le \varepsilon$$

をみたす $\mathbb{P}(M)$ の要素 $\{\mu_1, \ldots, \mu_N\}$ の最小個数 N のことであり，これを $E(f,\varepsilon)$ と表す．ただし，d_{W^1} は $\mathbb{P}(M)$ 上の 1 次 Wasserstein 距離とする．$\displaystyle\limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{\log E(f,\varepsilon)}{-\log\varepsilon} = \infty$ のとき，創発性は **Sup-P** であるという．この場合，コンピュータを使って $\{\delta_{n,f;x}\}$ の挙動を推測することは理論的に不可能である．現在は，桐木氏と中野氏との共同研究で，④で使用した微分同相写像を改良することにより，創発性が Sup-P である微分同相写像の持続的クラスの存在の証明を目指している．

(2) **双曲幾何学関係**　W. Thurson (1982) によって提案された，クライン群・双曲幾何学に関する 24 題からなる有名な問題集がある．大鹿健一氏との共同研究で，その第 8 番目の問題に対し最終的な解答が得られた．この結果を論文「Geometry and topology of geometric limits I」としてまとめ，現在投稿中である．

無限体積の 3 次元双曲多様体に関する剛性定理の研究を行った．$\varphi: M \longrightarrow M'$ を無限体積を持つ 3 次元双曲多様体の間の同相写像とする．ただし，M の各エンドは incompressible であり，基本群 $\pi_1(M)$ は有限生成であるとする．このような写像がいつ等長写像に固有ホモトピックになるかという剛性問題を研究した．最も有名な剛性定理は，2000 年代に Y. Minsky 他によって証明されたエンディング・ラミネーション定理である．この定理の主張は次のとおりである．

「$\varphi: M \longrightarrow M'$ がエンド不変量（すなわち幾何的有限エンドの等角構造と単純退化エンドのエンディング・ラミネーション）を保存するとき，φ は等長写像に固有ホモトピックである.」

この定理の証明の主要な道具は，曲線複体の理論である．特に重要なのは曲線複体の Gromov 双曲性と強調測地線 (tight geodesic) に対する弧長有界補題 (Length Upper Bound Lemma) である．一方，本研究代表者は，3 次元双曲多様体の剛性定理を体積の観点から説明できないかを考えてきた．その動機となったのは，3 次元閉双曲多様体に関する Gromov-Thurston の剛性定理である．その定理の主張は以下の通りである．

「$f : M \longrightarrow M'$ を 3 次元閉双曲多様体の間の写像度 1 の連続写像とする．このとき，f が等長写像にホモトピックになるための必要十分条件は，$\mathrm{Vol}(M) = \mathrm{Vol}(N)$ である.」

しかし，無限体積の双曲多様体 M では体積を不変量として使うことができない．そこで利用するのが，有界コホモロジー群の基本類 $[\omega_M] \in H_b^3(M, \mathbb{R})$ である．本研究代表者は，次の定理を証明した．

「$\varphi : M \longrightarrow M'$ を無限体積双曲 3 次元多様体の間の同相写像とする．$\pi_1(M)$ が有限生成ののとき，φ が双 Lipschitz 写像に固有ホモトピックであるための必要十分は，$\varphi^*([\omega_{M'}]) = [\omega_M]$ in $H_b^3(M, \mathbb{R})$ である.」

この結果の最初の証明は，エンディング・ラミネーション定理を利用したものであったが，その後 Gromov-Thurston 剛性定理を一般化した新しい証明法が発見できた．この結果は 2016 年 9 月の日本数学会秋期総合分科会 幾何学賞受賞特別講演で紹介した．現在では，この証明法を精密化することにより，エンディング・ラミネーション定理も包含する剛性定理が証明できる可能性も見えてきた．具体的な目的は,「φ が直伸体積に関する擬逆不等式 (pseudo-invese inequality for straightened volume) をみたすならば，φ は双リプシッツ写像と固有ホモトピックである」という主張を証明することである．証明方法としては，単純退化エンドの体積のプリーツ写像に沿った拡張率の比較が有効であると考えている．もしこの主張が正しければ，D. Sullivan の剛性定理に帰着させることにより，エンディング・ラミネーション定理の別証明が得られる．現在では，エンディング・ラミネーション定理の別証明もいくつかでてきているが，それらはすべて曲線複体を本質的に利用するものである．曲線複体の理論には全く頼らず，Gromov-Thurston の理論の延長上でこの定理を捉えるようとする方法は他に類をみない．この研究は今後も続けていきたい．

5．主な発表論文

〔雑誌論文〕（計 7 件）

(1) S. Kiriki, Y. Nakano and T. Soma, Historic behaviour for nonautonomous contraction mappings, Nonlinearity, 査読有，**32** (2019) 1111–1124
DOI: 10.1088/1361-6544/aaf253

(2) J. O'Hara, Characterization of balls by generalized Riesz energy, Math. Nachr., 査読有，**292** (2019), 159–169
DOI: 10.1002/mana.201700256

(3) S. Hashimoto, S. Kiriki and T. Soma, Moduli of 3-dimensional diffeomorphisms with saddle-foci, Discrete Conti. Dynam. Sys. A, 査読有，**38** (2018) 5021–5037
DOI: 10.3934/dcds.2018220

(4) S. Kiriki and T. Soma, Takens' last problem and existence of non-trivial wandering domains, Advances in Math., 査読有，**306** (2017) 524–588
DOI: 10.1016/j.aim.2016.10.019

(5) S. Kiriki, Y. Nakano and T. Soma, Non-trivial wandering domains for heterodimensional cycles, Nonlinearity, 査読有，**30** (2017) 3255–3270
DOI: 10.1088/1361-6544/aa7cc6

(6) S. Kiriki, M.C. Li and T. Soma, Geometric Lorenz flows with historic behavior Discrete Conti. Dynam. Sys. A, 査読有，**36** (2016) 7021–7028.
DOI: 10.3934/dcds.2016105

(7) J. O'Hara, Minimal unfolded regions of a convex hull and parallel bodies, Hokkaido Math. J., 査読有，**44** (2015) 175–183
DOI: 10.14492/hokmj/1470053289

〔学会発表〕（計 3 件）

(1) T. Soma, Volume and structure of hyperbolic 3-manifolds, JNU-KAIST Geometric Topology Fair (Jeju Nat'l Univ., KOREA) 2017 年

(2) 相馬輝彦，既約 3 次元多様体の幾何とトポロジー，日本数学会秋期総合分科会・幾何学・トポロジー分科会，幾何学賞受賞特別講演（関西大学），2016 年

(3) 相馬輝彦，Geometric Lorenz flows with historic behavior, 2015 年度冬の力学系研究集会（日本大学軽井沢研修所）2016 年

〔図書〕
該当なし

〔産業財産権〕
該当なし

〔その他〕
ホームページ
http://www.comp.tmu.ac.jp/trhksoma/

6．研究組織

(1) 研究分担者
研究分担者氏名：今井　淳
ローマ字氏名：(O'HARA, jun)
所属研究機関名：千葉大学
部局名：大学院理学研究科
職名：教授
研究者番号：70221132