様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ３０ 年　 ５ 月 ３１ 日現在

機関番号：３２６４２
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2014～2017
課題番号：２６４０００９８

研究課題名（和文）多様体の位相不変量と保型形式および一般デデキント和の研究

研究課題名（英文）Topological invariants of manifolds, modular forms and Dedekind symbols

研究代表者
福原　真二（Fukuhara, Shinji）

津田塾大学・その他部局等・名誉教授

研究者番号：２００１１６８７

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,100,000円

研究成果の概要（和文）：　位相不変量を記述するのに役立つと思われる一般デデキント和という関数を研究した。一般デデキント和は相互法則を満たすことがその特徴である。今回、奇関数型の一般デデキント和に加え、偶関数型の一般デデキント和に関してもその一般形を与えることができた。
もう一つの成果は、曲面上の曲線にホモトピー不変量を定義し、その結果を曲線の自己交差数の評価に応用したことである。これはカウフマン＝ジョーンズの不変量の考えを取り入れたものである。

研究成果の概要（英文）：We studied generalized Dedekind symbols which are useful for expressing topological invariants. The Dedekind symbols satisfy reciprocity laws. We give general forms, not only for odd symbols, but also for even symbols.
Another result is concerned with homotopy invariants of curves on a surface. The invariant can be used for estimating numbers of self-intersections. This invariant has been inspired by Kauffman-Jones polynomials.

研究分野：幾何学

キーワード：位相不変量　デデキント和　保型形式　結び目　多様体

１．研究開始当初の背景

多様体の位相幾何学や結び目理論において、位相不変量を用いて対象を理解することは重要である。ある多様体ともう一つの多様体が位相同型でないことを示す一般的な方法はそれらの位相不変量を計算し較べることである。それでは、不変量はどのような式で表せるだろうか。この問題意識のもと代表者は一般デデキント和の研究を続けてきた。デデキント和が多様体の不変量を表す式にしばしば登場するからである。

一般デデキント和は相互法則を満たすことがその本質的特性である。相互法則が一般デデキント和を特徴づけるということもできる。代表者は相互法則を分類することにより、一般デデキント和そのものを分類する仕事をしてきた。この理論は一般デデキント和が奇関数の時は既に完成しているが、偶関数の場合が未完成であった。そこで偶関数型一般デデキント和の明示式を求める事を今回の研究テーマの一つと考えた。

さらに、一般デデキント和の背後に存在する保型形式についても、考察を進めることが必要がある。

今回の研究成果のうちいくつかは、曲面上の曲線のホモトピー不変量に関するものである。カウフマン＝ジョーンズ型の不変量を定義しようという考えは、まったく新しいものである。

２．研究の目的

一般デデキント和のうち偶関数になるものに関して、具体的な形を楕円関数を用いて表すことをまず考える。その場合、保型形式のなす空間と一般デデキント和のなす空間との対応を基礎に、偶関数型一般デデキント和を構成してゆく方法を取る。偶関数、奇関数の場合にそれぞれ生成系が求まればすべての（多項式相互法則をもつ）一般デデキント和が求まる事になり所期の目標を達成することになる。

次に位相不変量の例として曲面上の曲線のホモトピー不変量の問題を考える。向き付けられたコンパクトな曲面で、境界が空でないものを考える。この曲面上の曲線で、はめこみになっており、自己交差は横断的であるとする。このような曲線に、カウフマン＝ジョーンズ型の不変量を定義することができる。そして、この不変量は、曲線の自己交差点の個数を評価するのに役立つ。カウフマン＝ジョーンズの不変量と同様に非常に強力な判定能力を持っていることが分かる。

曲線族に代数的演算を定義する方法はいろいろ存在する。そして、曲面上の曲線達の代数的構造は、しばしば、整数論的に興味のある公式を産み出す。代表者と久野雄介氏および河澄響矢氏の共同研究ではベルヌーイ数に関するクロネッカー公式が出現した。この方法を更に一般化すると、オイラー数に関する公式も得られる。曲線のトポロジーと整数論との内的関連が明らかになりつつあり、そのことに注意しつつ、研究を進める必要がある。

３．研究の方法

代表者の方法は解析関数や楕円関数、保型形式の性質を利用するものであり、更に応用として整数論に関するものもある。従って。幾何学、解析学、代数学に関わる横断的な手法を要求される。そのため、保型形式に関する最新の知見を吸収することを目的にカナダや台湾から研究者を招聘する。そして、共同のワークショップを開く。

特にカナダの Queen’s University から招く Noriko Yui 教授には保型形式に関する最近のヨーロッパやアメリカにおける進展の様子を教示してもらう。また台湾大学の Yifan Yang 教授には解析的整数論の古今の結果をサーベイしてもらう。これらの研究により、本来幾何学者である代表者が数学を横断的に観る上で必要な知識を身につける。

分担者も結び目理論の内外の研究者と意見交換するため、各種研究集会に参加する。多様体の位相不変量や、結び目の不変量はしばしば複雑になり人間の手計算では一部しか計算できない。不変量の計算結果から何か一般法則を見つけるためには膨大な量の計算が必要である。そのため数式処理ソフトウエアを使うのはもちろんであるが、自分でもソフトウエアを開発する必要があるのが普通である。今回も不変量の計算ソフトウエア、とくにデデキント和に関わる計算が高速に行えるソフトウエアの開発を、理論研究と平行しておこなう。

４．研究成果

発表した論文ごとに研究成果を説明していきたい。まず論文：Shinji Fukuhara, ”Generating functions of even Dedekind symbols with polynomial reciprocity laws”, Abh. Math. Semin. Univ. Hambg. 84 (2014), 139-153. では、一般デデキント和の生成系を与えた。一般デデキント和が奇関数の場合にはすでに代表者が楕円関数を用いた生成系の作り方を与えていたが、今回偶関数の場合にも成功した。二つの結果を合わせるとすべての〈多項式相互法則をもつ〉一般デデキント和を陽に書き表すことが可能になったわけである。

更にこの論文の利点は、生成関数を求めたことにある。重みのことなる一般デデキント和を一括して扱うことを可能にしたのである。

つぎは、久野雄介氏との共著論文：Shinji Fukuhara and Yusuke Kuno, ”Kauffman-Jones polynomial of a curve on a surface”, J. Knot Theory Ramifications 26 (2017), 1750062, 17 pp.である。ここで、著者らは曲面上の曲線のホモトピー類にカウフマン＝ジョーンズ型の不変量を導入した。絡み目のカウフマン＝ジョ

ーンズ多項式はイソトピー不変量である点を考慮すると、今回の不変量が、ホモトピーで不変になるのは注目に値すると考える

この不変量により曲線の自己交差数を下から評価することができ、いろいろの場合最小交差点数を正確に確定できる。もちろんこの不変量により、すべての場合に、最小交差点数が求まるわけではない。

次の論文は久野雄介氏および河澄響矢氏との共著論文である：Shinji Fukuhara, Nariya Kawazumi and Yusuke Kuno, "Self-intersections of curves on a surface and Bernoulli numbers, To appear in Osaka J. Math. この論文では、曲面の上の曲線のトポロジーを考察している。その中で曲線のトポロジーが数論の興味ある公式を生み出すことを示した。曲線に対する作用の研究から、ベルヌーイ数に関するクロネッカー公式の拡張版が得られたのである。元々のクロネッカー公式に較べ新たに２つの整数パラメータを含む公式であり、新しいパラメータの役割は興味深い。ベルヌーイ数は一般デデキント和に深く関係するので、曲線の不変量の中に一般デデキント和が登場するかどうかも注視していきたい。

研究分担者は次の２編の共著論文を発表した。１編目は Haruko Aida Miyazawa, Kodai Wada and Akira Yasuhara, "Linking invariants of even virtual links", J. Knot Theory Ramifications 26 (2017), 1750072, 12 pp.である。

仮想交差点により、各成分が偶数本の曲線に分解される仮想絡み目図式を、偶仮想絡み目図式という。仮想図式が偶であるという性質はライデマイスター移動や仮想ライデマイスター移動によって変化しない。本論文では偶仮想図式を利用して定義される新しい絡み数不変量を構成した。

２編目の論文は Haruko Aida Miyazawa, Kodai Wada and Akira Yasuhara, "Link invariants derived from multiplexing of crossings", To appear in Algebr. Geom. Topol.である。

古典的絡み目図式に対してその
m重化と呼ばれる変形を定義する。この変形により、古典的絡み目図式は仮想絡み目図式に変換される。この変換に関して、２つの同値な古典的絡み目図式のm重化はウエルデッド絡み目として等しいことを示す。

なお，これら２編の論文は研究分担者と安原晃氏(津田塾大学)，和田康載氏(早稲田大学)との共同研究である．

これらの論文で著者らは、仮想絡み目およびそれらのさらなる一般化を研究した。それらが具備する不変量がどう振る舞うのかに関して新しい結果を得た。獲得した多量の例は、代表者の一般デデキント和との関連性を探るのにも、役立つものと思われる。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　５件）

1. Shinji Fukuhara, Nariya Kawazumi and Yusuke Kuno, "Self-intersections of curves on a surface and Bernoulli numbers, To appear in Osaka J. Math. 査読有り

2. Haruko Aida Miyazawa, Kodai Wada and Akira Yasuhara, "Link invariants derived from multiplexing of crossings", To appear in Algebr. Geom. Topol. 査読有り

3. Shinji Fukuhara and Yusuke Kuno, "Kauffman-Jones polynomial of a curve on a surface", J. Knot Theory Ramifications 26 (2017), 1750062, 17 pp. 査読有り

4. Haruko Aida Miyazawa, Kodai Wada and Akira Yasuhara, "Linking invariants of even virtual links", J. Knot Theory Ramifications 26 (2017), 1750072, 12 pp. 査読有り

5. Shinji Fukuhara, "Generating functions of even Dedekind symbols with polynomial reciprocity laws", Abh. Math. Semin. Univ. Hambg. 84 (2014), 139-153. 査読有り

〔学会発表〕（計　0 件）

〔図書〕（計　0 件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計　0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計　0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織

(1)研究代表者
福原　真二（FUKUHARA SHINJI）
津田塾大学・その他部局等・名誉教授
研究者番号：20011687

(2)研究分担者
宮澤　治子（MIYAZAWA HARUKO）
津田塾大学・計数研・研究員
研究者番号：40266276

(3)連携研究者
(　　　)

研究者番号：

(4)研究協力者
(　　　)