

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 30 年 6 月 5 日現在

機関番号：32665

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2014～2017

課題番号：26400100

研究課題名(和文) 交代結び目に関する矯飾の手術予想

研究課題名(英文) Cosmetic surgery conjecture for alternating knots

研究代表者

市原 一裕 (ICHIHARA, Kazuhiro)

日本大学・文理学部・教授

研究者番号：00388357

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,700,000円

研究成果の概要(和文)：3次元空間内の結び目の研究では、これまでその補空間がよく活用されてきた。実際、同値な結び目の補空間は同相になる。逆に、同相な補空間をもつ結び目は同値であるということが、GordonとLueckeにより証明された。そこで鍵となったのは、結び目に沿ったデーン手術と呼ばれる操作である。実際、彼らは3次元空間内の結び目に沿った自明な手術と非自明な手術によって同相な3次元多様体は生成されない、ということを証明した。この結果の一般化についての予想が「矯飾の手術予想」であり、現在、様々な研究が進められている。本研究では特に、3次元空間内の交代結び目に着目し研究を行い、いくつかの部分的解決を得た。

研究成果の概要(英文)：In the study of knots in the 3-space, their complements have played important roles. In fact, the pair of complements of equivalent knots must be homeomorphic. In contrast, Gordon and Luecke have proved that the knots with homeomorphic complements must be equivalent. The key of their proof is an operation called Dehn surgery on knots. Actually, they showed that the trivial and any non-trivial Dehn surgeries on a non-trivial knot give non-homeomorphic pair of 3-manifolds. This theorem can be generalized to the conjecture on knots in general manifolds, which is now called the Cosmetic Surgery Conjecture. In this research project, we have focused on the Dehn surgeries on alternating knots in 3-space, and obtained some partial answer to the conjecture. Also given are some related results on 3-manifolds and knots and links.

研究分野：数物系科学

キーワード：3次元多様体 デーン手術 交代結び目

1. 研究開始当初の背景

3次元ユークリッド空間内の結び目は、その現実的な素朴さと数学的な構造の複雑さから広く興味を集め、結び目理論というトポロジーの一分野を構成するほど、研究が精力的に進められている。

この結び目理論において、分類を行ったり様々な性質を導いたりする為に、古典的に考えられてきたのは、結び目の補空間であった。実際、同値な二つの結び目の補空間は同相になることが直ちに従う。

逆に、同相な補空間をもつ結び目は同値であろう、というのが、いわゆる結び目補空間予想であった。この予想は1908年に提起されて以来、長らく未解決であったが、1989年に Gordon と Luecke により肯定的に解決された。そしてこの予想を、3次元空間内から他の3次元多様体内まで一般化したのが「一般化された結び目補空間予想」である。しかし、現在に至るまで未解決である。

一方、Gordon と Luecke による結び目補空間予想の解決の中で鍵となったのは、結び目に沿ったデーン手術と呼ばれる操作に関する手法である。実際、彼らは3次元空間内の結び目に沿った自明な手術と非自明な手術によって同相な3次元多様体は生成されない、ということを実証した。この結果の一般化についての予想が「矯飾的手術予想 (Cosmetic Surgery Conjecture)」である。正確には、一つの結び目に沿った異なるデーン手術によっては(向きも込めて)同相な3次元多様体は生成されないだろう、と述べられる。実際、一般化された結び目補空間予想もこの予想から従う。現在、この予想はデーン手術理論で最も重要な未解決予想の一つとして、様々な研究が進められている。

2. 研究の目的

本研究の目的は、この矯飾的手術予想を、結び目理論において非常に良く知られている3次元空間内の交代結び目に沿ったデーン手術について肯定的に解決することであった。つまり、非自明な交代結び目に沿った異なる2つのデーン手術によっては、向きも込めて同相な閉3次元多様体が得られないことを証明することであった。

3. 研究の方法

矯飾的手術予想へのアプローチとして、

(1)交代結び目に沿ったデーン手術によって得られる多様体の様々な不変量(キャッソン不変量、ヒーガード・フレア・ホモロジー)の計算

(2)交代結び目補空間の双曲構造の計算機援用による解析

(3)手術後の多様体のヒーガード分解および向き付け不可能曲面による片面的ヒーガード分解の研究

を考え、研究を行った。特に意識したこととして、位相幾何的な手法と微分幾何的な

手法の融合、コンピュータ援用計算の利用、さらに、近年新しく開発された研究手法を意欲的に取り込みながらのアプローチが挙げられる。

また、実際に起こりうる反例となりうる結び目とデーン手術の候補の研究や、関連するデーン手術についての研究、さらにそのほかの結び目・絡み目不変量についても、補完的な意味を込めて研究を行った。

4. 研究成果

(1)3次元多様体の不変量を用いた矯飾的手術予想へのアプローチ:3次元多様体のよく知られた不変量であるキャッソン不変量の亜種である $SL(2, \mathbb{C})$ -キャッソン不変量の計算に取り組み、ある種の二橋結び目の無限族について、各結び目に沿ったデーン手術で得られるホモロジー球面がすべて異なることを示すことができた。この研究は斎藤敏夫氏(上越教育大学)との共著論文として完成させた。この研究は、従来まで応用されて来なかった不変量に新たな光をあてるものであり、意義深いものと考えられる。また取り扱った結び目の族は、矯飾的手術予想に関する先行研究において利用された不変量を適用できないもので、その意味で重要な研究対象であると考えられる。(下記論文)

(2)3次元多様体の双曲構造の研究、特にコンピュータ援用による解析:まず、継続して研究を行っていたコンピュータ援用による3次元多様体の双曲性の判定の研究を完成させた。(大石進一氏らとの共同研究、下記論文)

この結果で得られたプログラム hikmot を用いて、正井秀俊氏(東北大学)との共同研究により、双曲的交代結び目に沿った双曲でない多様体を生成するデーン手術(いわゆる例外的デーン手術)の完全分類を与えることができ、共著論文として発表した(下記論文)。これは交代結び目補空間の双曲構造の解析の研究として重要な位置付けを持つと考えている。

(3)多様体のヒーガード分解に関連する研究:デーン手術で得られる多様体のヒーガード分解と関連する、結び目補空間の境界スロープについて、これまでに知られていない現象を発見した(下記論文11)。

また3次元多様体の円周上の曲面束構造について研究し、そのモノドロミー写像の曲線複体への作用の移動距離が1より大きい時のファイバー曲面の種数の上限を、その3次元多様体の四面体分割の四面体の個数を用いて具体的に与えた。これは小林毅氏(奈良女子大学)、Yo'av Rieck氏(アーカンソー大学)との共著論文として発表した(下記論文)

一方、3次元多様体のヒーガード分解に対

応する結び目 / 絡み目の橋分解について研究を行い, ランダムに複雑性を増すような橋分解を持つ絡み目について, その最頻成分数と双曲性に関する結果を得ることができた. これらの結果はそれぞれ, 吉田健一氏 (日本大学), Jiming Ma 氏 (復旦大学) との共著論文として発表した. (下記論文,)

(4) 関連する基礎研究: ある種のねじれトラス結び目が左不変順序付不可能手術を許容しないことを証明した. これは天摩由貴氏 (日本大学) との共著論文として発表した (下記論文). この3次元多様体の左不変順序付不可能性は近年, 研究が進められているヒーガード・フレア・ホモロジーと密接な関係がある.

またさらに関連する絡み目の不変量に関する結果として, 絡み目のフォックス彩色の最小彩色数の下限について, また, 整数彩色の最小彩色数について, 研究を行い, 松土恵理氏 (日本大学) との共著論文として発表した. (下記論文, ,) これらの研究は当該研究に直接に関わるものではないが, 関連する基礎研究として意義のあるものと考えている.

5. 主な発表論文等

(研究代表者, 研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 11 件)

以下, すべての論文は査読あり

Kazuhiro Ichihara, Eri Matsudo, Minimal coloring number on minimal diagrams for Z-colorable links, Proceedings of the Institute of Natural Sciences, Nihon University, Vol.53, 2018, pp.231-237.

Kazuhiro Ichihara, Toshio Saito, Cosmetic surgery and the $SL(2, \mathbb{C})$ Casson invariant for two-bridge knots, Hiroshima Mathematical Journal, Vol.48, 2018, pp.21-37.
<https://projecteuclid.org/euclid.hmj/1520478021>

Kazuhiro Ichihara, Ken-ichi Yoshida, On the most expected number of components for random links, Tohoku Mathematical Journal, Vol.69, 2017, pp.637-641.
DOI:10.2748/tmj/1512183634

Kazuhiro Ichihara, Jiming Ma, A random link via bridge position is hyperbolic, Topology and its Applications, Vol.230, 2017, pp.131-138.
DOI:10.1016/j.topol.2017.08.028

Kazuhiro Ichihara, Eri Matsudo, Minimal coloring number for Z-colorable links, Journal of Knot Theory and Its Ramifications, Vol. 26, 2017, pp. 1750018-1~23.
DOI:10.1142/S0218216517500183

Kazuhiro Ichihara, Hidetoshi Masai, Exceptional surgeries on alternating knots, Communications in Analysis and Geometry, Vol.24, 2016, pp.337-377.
DOI:10.4310/CAG.2016.v24.n2.a5

Kazuhiro Ichihara, Eri Matsudo, A lower bound on minimal number of colors for links, Kobe Journal of Mathematics, Vol.33, 2016, pp.53-60.

Neil Hoffman, Kazuhiro Ichihara, Masahide Kashiwagi, Hidetoshi Masai, Shin'ichi Oishi, Akitoshi Takayasu, Verified Computations for Hyperbolic 3-Manifolds, Experimental Mathematics, Vol.25, 2016, pp.66-78.
DOI:10.1080/10586458.2015.1029599

Kazuhiro Ichihara, Tsuyoshi Kobayashi, Yo'av Rieck, Strong cylindricality and the monodromy of bundles, Proceedings of the American Mathematical Society, Vol.143, 2015, pp.3169-3176.
DOI:10.1090/S0002-9939-2015-12473-2

Kazuhiro Ichihara, Yuki Temma, Non left-orderable surgeries and generalized Baumslag-Solitar relators, Journal of Knot Theory and Its Ramifications, Vol.24, 2015, pp.1550003-1~8
DOI:10.1142/S0218216515500030

Kazuhiro Ichihara, Pairs of boundary slopes with small differences, Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana, Vol.20, 2014, pp.363-373.
DOI:10.1007/s40590-014-0021-y

[学会発表] (計 24 件)

市原一裕, 伊藤哲也, 斎藤敏夫, 対掌矯飾的手術とキャッソン不変量, 日本数学会 2018 年度年会, 2018-3-20.

Kazuhiro Ichihara, Exceptional surgeries on knots and links, OIST Mini Symposium "Computational Problems in Low-dimensional Topology", 2018-3-14.

市原一裕, Vanishing elements in a hyperbolic knot group by Dehn fillings, 研究集会「錐多様体と基本領域」, 2018-1-26.

Kazuhiro Ichihara, Thin position for incompressible surfaces in 3-manifolds, The 2nd Pan Pacific International Conference on Topology and Applications, 2017-11-15.

市原一裕, $SL(2, \mathbb{C})$ Casson invariant and chirally cosmetic surgery, 東北結び目セミナー 2017, 2017-9-29.

市原一裕, Chirally cosmetic surgeries and Casson invariants, 拡大 KOOK セミナー 2017, 2017-8-30.

Kazuhiro Ichihara, Non-leftorderable surgeries on twisted torus knots, Differential Topology 17, 2017-03-29.

Kazuhiro Ichihara, Generalizations of the Casson invariant and their applications to the cosmetic surgery conjecture, Invariants of 3-manifolds related to the Casson invariant, 2017-01-26.

Kazuhiro Ichihara, The $SL(2, \mathbb{C})$ Casson invariant and cosmetic surgeries, Fundamental Groups, Representations and Geometric Structures in 3-Manifold Topology, 2016-11-22.

市原一裕, Hyperbolic small knots in lens spaces, 東北結び目セミナー 2016, 2016-10-16.

Kazuhiro Ichihara, Minimal coloring number for Z -colorable links, KOOK-TAPU Workshop of Knots in Tsushima Island, 2016-09-07.

市原一裕, Jones polynomial and cosmetic surgery, 拡大 KOOK セミナー, 2016-08-22.

市原一裕, 斎藤敏夫, 鄭仁大, 結び目に沿った矯飾的手術予想について, 日本数学会 2016 年度年会, 2016-03-16.

市原一裕, Jiming Ma, 吉田健一, ランダム絡み目の最頻成分数と双曲性, 日本数学会 2016 年度年会, 2016-03-16.

Kazuhiro Ichihara, Thin position for incompressible surfaces in 3-manifolds, The 11th East Asian

School of Knots and Related Topics, 2016-01-28.

Kazuhiro Ichihara, A random link via bridge position is hyperbolic, The 1st Pan Pacific International Conference on Topology and Applications, 2015-11-28.

市原一裕, Cosmetic surgery on knots, 東北結び目セミナー 2015, 2015-10-25.

市原一裕, Cosmetic surgery and $SL(2, \mathbb{C})$ Casson invariant for two-bridge knots, 拡大 KOOK セミナー2015, 2015-08-18.

市原一裕, On partitions of components for closed random braids, Intelligence of Low-dimensional Topology, 2015-05-20.

市原一裕, ねじれトーラス結び目に沿った左順序付不可能手術, 日本数学会 2015 年度年会, 2015-03-24.

21 Kazuhiro Ichihara, Non left-orderable surgeries and generalized Baumslag-Solitar relators, The Tenth East Asian School of Knots and Related Topics, 2015-01-28.

22 市原一裕, Non left-orderable surgeries and generalized Baumslag-Solitar relators, 東北結び目セミナー 2014, 2014-10-19.

23 Kazuhiro Ichihara, Verified computations for hyperbolic 3-manifolds, Knots and Low Dimensional Manifolds: a Satellite Conference of Seoul ICM 2014, 2014-08-22.

24 Kazuhiro Ichihara, Complete classifications of exceptional surgeries on Montesinos knots and alternating knots, International Congress of Mathematicians 2014, 2014-08-18.

〔その他〕
ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者
市原一裕 (ICHIHARA, Kazuhiro)
日本大学・文理学部・教授
研究者番号: 00388357