

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 10 日現在

機関番号：11301

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2014～2016

課題番号：26400103

研究課題名(和文) 行列・作用素不等式と量子情報理論・自由確率論への応用

研究課題名(英文) Matrix/operator inequalities and applications to quantum information and free probability

研究代表者

日合 文雄 (Hiai, Fumio)

東北大学・情報科学研究科・名誉教授

研究者番号：30092571

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,700,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、行列・作用素解析、量子情報、自由確率論の3つの分野の研究を行い、多方面にわたって成果を得た。行列・作用素解析の分野では、作用素単調・凸関数の高階への拡張であるk-調関数について研究した。作用素単調関数と対称反ノルムを含む行列・作用素のトレースおよびノルム関数に対する凹性と優加法性について研究した。行列に対する対数マジョリゼーションを異なる観点から拡張する研究も行った。

量子情報の分野では、量子f-ダイバージェンスや単調計量などに関する量子情報路の縮小度数を研究した。自由確率論の分野では、変分原理の観点から、軌道型の自由エントロピーと自由フィッシャー情報量に関する研究を行った。

研究成果の概要(英文)：In the course of this research project we obtained various results in the three subjects of matrix/operator analysis, quantum information, and free probability. In matrix/operator analysis, we studied the higher order extension, called k-tone functions, of operator monotone and concave functions in connection with the kth derivative of functional calculus. We introduced the notion of symmetric anti-norms for matrices/operators and discussed the Jensen-Minkowski type concavity and superadditivity inequalities of matrix trace/norm functions involving operator means and symmetric anti-norms. We also studied extensions of Araki's and Ando-Hiai's log-majorizations from different aspects.

In quantum information, we studied contraction coefficients for quantum channels with respect to quantum f-divergences and quantum monotone metrics. In free probability, we studied the orbital free entropy and free Fisher information from the viewpoint of variational principle based on Legendre transform.

研究分野：関数解析学

キーワード：関数解析学 作用素 行列解析 作用素環 量子情報 自由確率論

1. 研究開始当初の背景

(1) 行列(また作用素)に対する不等式の研究は、半正定値性から定まる順序関係に関する行列そのものの不等式、行列の固有値・特異値に対する大小関係やマジョリゼーション(優越関係)、行列のトレースやノルム関数に対する不等式など様々である。行列・作用素不等式の歴史は非常に古く、体系的な研究は Loewner の 1934 年の論文と彼の弟子 Kraus の 1936 年の論文に始まる。彼等の理論は作用素単調・作用素凸関数についての理論であり、これらの関数の積分表示が行列・作用素解析の多くの場面で重要な役割を演じてきた。特に、久保-安藤による作用素平均の理論(1980年)により、作用素単調関数と作用素平均は 1 対 1 に対応することが示された。行列固有値のマジョリゼーションは行列論において最も行列解析らしい話題の 1 つであり、種々の研究が行われてきた。このように、行列に対する不等式は、R. Bhatia, "Matrix Analysis", Springer に解説されているように、様々な設定と手法で多岐にわたり息の長い研究と応用が行われてきた。

(2) 量子確率統計を基礎とする量子情報理論の研究は 1970 年代に A.S. Holevo 等によって開始されたが、20 年間ほど停滞気味であった。しかし、エンタングル状態が発見されたことや長い間の懸案であった量子情報路符号化定理が証明されたことが契機となつて、量子情報理論は 1990 年代後半以降に爆発的に発展し、膨大な研究分野に拡大した。代表者と D. Petz が 1991 年に量子 Stein の補題の順定理を示したことは、最近の量子仮説検定理論の目覚ましい発展の先駆けであった(これの逆定理は小川-長岡が 2000 年に示した)。さらに、Petz が導入した相対エントロピーの一般化である擬エントロピー(量子ダイバージェンスともいう)と Fisher 情報量の量子版である単調計量(量子 Fisher 情報量ともいう)は、量子情報理論と量子情報幾何で必須の概念となった。他方、量子物理の分野に現れた Wigner-Yanase-Dyson の歪情報量(1963年)は、その凸性問題を解決した Lieb 凹性(1973年)と相まって、作用素論と量子情報理論の両方の分野に大きな影響を与えた。

(3) 自由確率論は D. Voiculescu が創始して既に 30 年が過ぎた。この理論は自由群や作用素環の自由積と密接に関係するが、ランダム行列の手法が有効に使われることが重要な特長であった。Voiculescu が Boltzmann-Gibbs エントロピーの自由確率版として導入した非可換確率変数に対する自由エントロピーは自由確率論のハイライトの 1 つである。統計物理では、エントロピーと圧力関数が互いに他の Legendre 変換で表すことができ、Legendre 変換の等号条件が平衡状態を記述するという変分原理の考え方

が普遍的である。代表者はこの考えを自由確率論に適用して、自由圧力を導入しその Legendre 変換によって、新しい自由エントロピーを定義した。さらに、ランダム行列のユニタリ軌道アプローチで、軌道的自由エントロピーを導入し、Voiculescu の自由エントロピーとの関係式を示した。この軌道的自由エントロピーのマイナス符号は Voiculescu が liberation 理論で導入した相互自由情報量と本来一致すべきものと考えられた。

2. 研究の目的

本研究の目的は、量子情報理論や自由確率論の分野への応用を念頭において、行列・作用素解析に関連する種々の問題を不等式の観点から研究することであった。主な研究項目は以下の通りである。

(1) 行列のトレース・ノルム不等式: 1 変数または多変数行列関数のトレースおよび対称(反)ノルムの大小関係と凹凸性について、作用素平均や作用素単調・作用素凹凸関数と関連させた研究を意図した。ここで、対称ノルム(つまり、ユニタリ不変ノルム)は行列解析でよく知られたものであるのに対し、対称反ノルムは最近の論文で導入されたものであり、今後研究すべきテーマが多い。これについて、半有限トレースをもつ von Neumann 環の設定で一般理論を構築することも目指した。

(2) 作用素不等式: 作用素単調・作用素凸関数や作用素平均が含まれる作用素・行列不等式についての研究を意図した。この種の作用素不等式は既に研究されつくしている状況ではあるが、作用素対数凸関数の新しい視点と、自己共役でない作用素の解析関数カルキュラスの実部と虚部を考える視点からの研究を目指した。さらに、作用素 k -調関数の関数カルキュラスの高階 Frechet 微分や Taylor の公式に対する作用素不等式も意図した。ここで、作用素 k -調関数の概念は作用素単調・作用素凸関数を高階の場合に拡張するものである。

(3) 量子情報理論への応用: 量子情報理論と量子情報幾何において重要な不等式には、相対エントロピーを拡張した種々のダイバージェンスや単調計量と呼ばれる Riemann 計量を含むものが多い。他にもフィデリティなど、量子情報理論で重要な量の多くが行列のトレース関数で表される。行列解析を基礎として、量子情報に現れる様々な量の間の不等式とその等号条件についての研究を意図した。特に、これらの量に対する量子情報路(または確率写像)の下での縮小性と十分性についての研究を目指した。

(4) 自由エントロピー: 統計力学的な変分原理に基づく自由圧力と自由エントロピーの研究と、ランダム行列とユニタリ軌道アプ

ローチに基づく自由エントロピーの研究を以前に行った。これらの観点を融合して、ユニタリ軌道アプローチで自由圧力を導入し、その Legendre 変換によって、新しい軌道的自由圧力と軌道的自由エントロピーを定義した。これらの一般的性質、および従来の自由エントロピーや相互自由(Fisher)情報量との関係を確立することを意図した(しかし、この目標は必ずしも成功していない)。

3. 研究の方法

行列・作用素不等式の理論分野と量子情報理論の応用分野を双方向的に関連させながら研究を行った。関連して、ランダム行列と変分原理を基礎とする自由エントロピーの研究も行った。研究が実効あるものになるように、研究テーマ別に以前から共同研究している共同研究者に研究協力者になってもらい、随時メールで連絡を取りながら研究を進め、必要に応じて研究協力者を訪問し討議した。また、国内外の関係する研究集会・ワークショップに参加し、成果発表と情報交換を行った。具体的な共同研究の内容は以下の通りである。

(1) 当初の重要課題の1つであった自由確率論における自由エントロピーと自由 Fisher 情報量に関する不等式と変分原理の研究では、連携研究者と植田氏(九大)と共同研究を行った。論文 [1] がその成果である。しかし、自由エントロピーの研究の本質的な難しさから、その後の研究があまり進展していない。

(2) フランシエ・コムテ大学(フランス)の J.-C. Bourin 氏および U. Franz 氏と行列・作用素不等式の分野で共同研究を行ったことは、本研究を進める上で非常に生産的であった。論文 [2], [3], [4] がその成果である。単著論文 [5] はの継続論文である。

(3) M.B. Ruskai 氏(米国)と論文 [6] で共同研究できたことは、本研究を進める上で有意義であり、代表者にとって貴重な経験であった。

(4) 以前からの共同研究者である K.M.R. Audenaert 氏(英国)と論文 [7] で共同研究できたことも、本研究において有意義であった。Audenaert 氏とは引き続き共同研究を行う予定である。

(5) 本研究の最終年度においては、新たに R. König 氏(ドイツ)および M. Tomamichel 氏(オーストラリア)、M. Lin 氏(中国)、Y. Lim 氏(韓国)とも共同研究を行った。論文 [8], [9] がそれぞれの成果である。Lim 氏とは共同研究を継続中であり、継続の共著論文を数編書く予定である。

4. 研究成果

以下に、本研究の成果を各発表論文に対応させて説明する。

(1) Franz および Ricard との共同研究により、作用素・行列解析で有用な作用素単調関数・作用素凸関数の理論を高階の場合に拡張し、関数カルキュラスの k 階微分の正値性と関連する k -調関数に対するいくつかの特徴付けを与えた(論文 [10])。さらに、継続研究として、作用素 k -単調関数と作用素の解析関数カルキュラスとの関連について考察した(論文 [11])。

(2) Franz との共同研究で、 $(0, 1)$ (また $(0, 1)$) 上の非負の作用素凸関数の作る凸錐について、端点やフェイスの構造を考察した(論文 [12])。

(3) Bourin との 2011 年の共著論文では、行列解析の分野で有用な対称ノルム(ユニタリ不変ノルム)の劣加法性に代わる優加法性を満たす対称反ノルムの概念を導入して、Minkowski 行列式等式を拡張する対称反ノルム不等式を得た。これを発展させて、作用素平均などの種々の行列関数に対する対称反ノルム不等式を示した(論文 [13])。さらに、対称反ノルムの概念を有限 von Neumann 環の場合に拡張して、対称反ノルムを含む Jensen-Minkowski 型の凹性と優加法性の不等式について、行列に対して得られていたものより強い不等式を有限 von Neumann 環に付随する可測作用素に対して証明することに成功した(論文 [14])。

(4) 植田との共同研究により、統計物理的な変分原理の観点から軌道型の自由圧力関数とそれの Legendre 変換として導入される自由エントロピー(相互自由情報量的一种)、さらに Legendre 変換の等号条件を満たす軌道の平衡トレース状態について研究し、十分な成果を得た(論文 [15])。

(5) 量子情報の分野で最近発展している新しいタイプの量子 Renyi 相対エントロピーの問題から派生した Lie-Trotter 積公式を逆向きに補完する行列の極限公式について、Audenaert と共同研究し、所定の成果を得た(論文 [16])。

(6) Ruskai との共同研究により、密度行列に対する量子ダイバージェンスや単調 Riemann 計量に関して、量子情報路の下での縮小性を測る縮小度数について、各種の縮小度数の関係性を研究し、 q ビット情報路の具体例で計算を行った(論文 [17])。

(7) 行列のマジョリゼーション理論において重要な荒木の対数マジョリゼーションと安藤-日合の対数マジョリゼーションを拡張する研究を行い、所定の成果を得た(論文 [18])。

(8) 2変数の行列のトレース・ノルム関数の凹凸性についての以前からの継続研究を行い、以前の結果を大幅に改良することができた(論文 [19])。

(9) Lin との共同研究により、行列の

Hadamard 積と幾何平均の固有値・特異値に対して知られていた対数マジョリゼーション型の不等式について，幾何平均を重み付き幾何平均の場合に拡張することに成功した(論文)。

(10) Konig および Tomamichel との共同研究により，行列の特異値に対する(対数)マジョリゼーションの概念を対数積分の平均を含む形に拡張して，以前の荒木-Lieb-Thirring の Golden-Thompson 型の対数マジョリゼーションとユニタリ不変ノルム不等式を多変数の行列の場合に拡張することに成功した(論文)。

(11) Lim との共同研究で，正定値行列の作る Riemann 多様体上の確率測度に対する Cartan 重心(多変数の幾何平均を一般化したもの)に対して，対数マジョリゼーションと Lie-Trotter 積公式を研究し，目標の結果を得た(論文)。Lim とは引き続き共同研究を行っている。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 13 件)

F. Hiai and Y. Lim, Log-majorization and Lie-Trotter formula for the Cartan barycenter on probability measure spaces, *J. Math. Anal. Appl.* 453 (2017), 195-211.
DOI:10.1016/j.jmaa.2017.03.027

F. Hiai, R. Konig and M. Tomamichel, Generalized log-majorization and multivariate trace inequalities, *Ann. Henri Poincare* (2017), 印刷中.
DOI: 10.1007/s00023-017-0569-y

F. Hiai and M. Lin, On an eigenvalue inequality involving the Hadamard product, *Linear Algebra Appl.* 515 (2017), 313-320.
DOI:10.1016/j.laa.2016.11.017

F. Hiai, A generalization of Araki's log-majorization, *Linear Algebra Appl.* 501 (2016), 1-16.
DOI:10.1016/j.laa.2016.03.023

F. Hiai, Concavity of certain matrix trace and norm functions. II, *Linear Algebra Appl.* 496 (2016), 193-220.
DOI:10.1016/j.laa.2015.12.032

F. Hiai and M.B. Ruskai, Contraction coefficients for noisy quantum channels, *J. Math. Phys.* 57 (2016), 015211, 33 pp.
DOI:10.1063/1.4936215

K.M.R. Audenaert and F. Hiai, Reciprocal Lie-Trotter formula, *Linear and Multilinear Algebra* 64 (2016), 1220-1235.

DOI:10.1080/03081087.2015.1082957

F. Hiai, Operator k -tone functions and analytic functional calculus, *Linear and Nonlinear Analysis* 1 (2015), 201-219.
URL:<http://www.ybook.co.jp/lna.html>

J.-C. Bourin and F. Hiai, Anti-norms on finite von Neumann algebras, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* 51 (2015), 207-235.
DOI:10.4171/PRIMS/

F. Hiai and Y. Ueda, Orbital free pressure and its Legendre transform, *Comm. Math. Phys.* 334 (2015), 275-300.
DOI:10.1007/s00220-014-2135-5

J.-C. Bourin and F. Hiai, Jensen and Minkowski inequalities for operator means and anti-norms, *Linear Algebra Appl.* 456 (2014), 22-53.
DOI:10.1016/j.laa.2014.05.030

U. Franz and F. Hiai, Conic structure of the non-negative operator convex functions on $(0, \infty)$, *Ann. Funct. Anal.* 5 (2014), 158-175.
URL:www.emis.de/journals/AFA/

U. Franz, F. Hiai and E. Ricard, Higher order extension of Loewner's theory: Operator k -tone functions, *Trans. Amer. Math. Soc.* 366 (2014), 3043-3074.
DOI:10.1090/S0002-9947-2014-05942-4

[学会発表](計 11 件)

F. Hiai, Generalized log-majorization and multivariate Golden-Thompson type inequalities, 2016 China-Korea International Conference on Matrix Theory with Applications, December 30, 2016, Shanghai, China.

F. Hiai, Different quantum f -divergences and the reversibility of quantum operations, Workshop: Quantum Information Theory and Mathematical Physics, September 19, 2016, Budapest University of Technology and Economics, Budapest, Hungary.

F. Hiai, Reversibility of stochastic maps via quantum divergences, 17th Workshop: Non-commutative Harmonic Analysis, July 29, 2016, Bedlewo, Poland.

F. Hiai, A generalization of Araki's log-majorization, The 20th Conference of the International Linear Algebra Society, July 15, 2016, Catholic University of Leuven, Leuven, Belgium.

F. Hiai, Quantum divergences and reversibility, Workshop: Mathematical Aspects in Current Quantum Information Theory, February 15, 2016, National

Institute for Mathematical Sciences,
Daejeon, Korea.

F. Hiai, Concavity/convexity of certain
matrix trace and norm functions, Workshop
on Quantum Information Theory and Related
Topics, September 1, 2015, Vietnam
Institute for Advanced Study in
Mathematics, Hanoi, Vietnam.

F. Hiai, Anti Lie-Trotter formula,
International Workshop: Algebraic and
Analytic Aspects of Quantum Levy Processes,
March 12, 2015, Alfried Krupp
Wissenschaftskolleg, Greifswald,
Germany.

F. Hiai, Powers of nonnegative matrices,
ARCC Workshop: Positivity, Graphical
Models, and Modeling of Complex
Multivariate Dependencies, October 15,
2014, American Institute of Mathematics,
Palo Alto, USA.

F. Hiai, Anti Lie-Trotter formula, The
19th Conference of the International
Linear Algebra Society, August 6, 2014,
Sungkyunkwan University, Seoul, Korea.

F. Hiai, Anti-norms and superadditivity
inequalities on positive matrices and in
type II₁ factors, 16th Workshop:
Non-commutative Harmonic Analysis, July
11, 2014, Bedlewo, Poland.

F. Hiai, Different approaches to mutual
information in free probability theory,
Random Matrix Theory: Foundations and
Applications, July 4, 2014, Collegium
Maius, Krakow, Poland.

〔図書〕(計 1 件)

F. Hiai and D. Petz, Introduction to
Matrix Analysis and Applications,
Hindustan Book Agency and Springer, 2014,
pp.1-332.

6 . 研究組織

(1)研究代表者

日合 文雄 (HIAI, FUMIO)

東北大学・大学院情報科学研究科・名誉教
授

研究者番号 : 30092571

(4)研究協力者

植田 好道 (UEDA, YOSHIMICHI)

九州大学・大学院数理学研究院・准教授

Jean-Christophe Bourin (フランス)

Universite de Franche Comte

M.B. Ruskai (米国)

Emeritus Professor, University of
Massachusetts Lowell

K.M.R. Audenaert (英国)

Royal Holloway, University of London