様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ３０ 年　６ 月 １５ 日現在

機関番号： １２６０１
研究種目： 基盤研究(C)（一般）
研究期間： 2014～2017
課題番号： ２６４００１１０

研究課題名（和文）代数解析および数式処理による高階偏微分方程式系の解の構造の研究

研究課題名（英文）A study of solutions of systems of higher order partial differential equations by algebraic analysis methods and formula manipulation methods

研究代表者
片岡　清臣（Kataoka, Kiyoomi）

東京大学・大学院数理科学研究科・名誉教授

研究者番号：６０１０７６８８

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,400,000円

研究成果の概要（和文）：解析的線形偏微分方程式系に対しては初期値・境界値混合問題の座標不変かつ代数解析的な定式化，すなわちD-加群に対する定式化に成功した．同時に佐藤超関数解の境界に沿う解析的特異性伝播など超局所解析的性質を導くための主要道具となる正則関数解の層複体の柏原正樹・P. Schapiraの意味のマイクロ台の評価定理を得た．非線形方程式系については円周上を動き，弱い結合をもつ多数の振動子の共振の数理モデルである蔵本モデルに関する予想の証明に成功した千葉逸人の理論の数学的な不備を発見し修正に取り組んだ．特に主要なアイデアであり鍵となる線形作用素の一般化固有関数展開の意味を正確に与え証明した．

研究成果の概要（英文）：Concerning systems of linear analytic partial differential equations, we succeeded in giving coordinate-free formulations of the initial-boundary value mixed problems for D_X modules. At the same time we obtained a key theorem on the estimate of micro-supports of some holomorphic solution sheaf complexes in the sense of M.Kashiwara-P.Schapira, which is an essential tool clarifying the propagation of micro-analyticity of Sato hyperfunction solutions along the boundary. Concerning non-linear differential equations, we succeeded in clarifying the generalized eigenfunction expansions due to Hayato Chiba's theory on Kuramoto's weakly coupled many oscillators model on a circle for resonance phenomena. We found some essential error in Chiba's theory and gave a correct formulation and a proof.

研究分野： 代数解析学

キーワード： 解析関数　偏微分方程式系　初期値・境界値混合問題　D-加群　佐藤超関数　層のマイクロ台　一般化固有関数　蔵本モデル

１．研究開始当初の背景

(1) 混合問題：解析的線形偏微分方程式の初期値・境界値混合問題の佐藤超関数論での取り扱いは 1991 年, 戸瀬信之との共同研究 On microhyperbolic mixed problems", J. Math. Soc. Japan 43 で初めて成功し，解の存在や超局所解析性の境界に沿っての伝播定理などに応用できた．しかし光の回折現象などを記述するにはより高度な第２解析性と呼ばれる概念が必要であることが G. Lebeau によって示されていた．上記の理論は全空間を境界方向と法線方向の２組の変数に直積分解して議論するので変数の取り方の自由度が制限され第２解析性に適合させるには難しかった．また，方程式の数と未知関数の数が等しい場合，すなわち決定系に限られていて，初期値問題に関する柏原正樹・P. Schapira の D-加群に対するマイクロ双曲型方程式系の理論のような代数的一般性がなかった.

(2) 曲面の方程式系：非線形高階偏微分方程式系の課題は３次元ユークリッド空間内の C^5 級の曲面片 M で各点を通る２種類以上の円の連続族をもつようなものを特徴付ける５階非線形偏微分方程式系の解の考察であった．この方程式系は竹内伸子との共同研究で２０１０年に発見し，２０１３年には5階常微分方程式系に帰着できることもわかった．しかし大変複雑な方程式のため具体的に解を解析するにはサーバークラスの高性能パソコンと数式処理ソフトが必要であった.

(3) 蔵本予想：修士課程大学院生馬田優に研究課題として千葉逸人による蔵本予想の解決に関する論文を提案したが読み進むうちに論文の鍵となるある線形作用素の一般化固有関数展開なるものの数学的証明が不完全であることが判明した．この予想はメトロノームなどのたくさんの振動子が互いに弱い結合で結ばれている時最終的に全体が同期してしまう，という物理現象の数理モデルとして有名であって千葉は２０１５年の論文, A proof of the Kuramoto conjecture for a bifurcation structure of the infinite dimensional Kuramoto model, Ergo. Theo. Dyn. Syst, 35 (2015), 762-834,で予想を結合定数 K に対する不等号条件の下で肯定的に解決した．当該論文は非線形微積分方程式の解析であるが解の複素解析性と関数解析を証明の重要な道具として用いることで本研究課題の観点とも整合している.

２．研究の目的

(1) 混合問題：解析的偏微分方程式系に対する初期値・境界値混合問題については余次元１の解析的境界だけに依存し座標系のとりかたによらない方法で代数解析的に取り扱う理論を構築する．また，扱う方程式系も D-加群のような代数的に一般化された方程式系にまで拡張したい.

(2) 曲面の方程式系：円の連続族を２種類含む曲面の方程式系の解の構造を調べることはそのような曲面を解析的にすべて決定することにつながり幾何学的にも興味深い重要な目的である.

(3) 蔵本予想：蔵本予想は数理物理学的に重要である．従ってその解決である千葉理論の数学的不備の修正は重要であり，千葉氏を含む京都大学の力学系の研究者グループにも大変興味を持たれていて是非とも早急に解決する必要がある.

３．研究の方法

(1) 混合問題：初期値・境界値混合問題の座標不変な定式化では以前回折現象の数理モデルとなる混合問題の第２超局所解析のために A geometric approach to diffraction problems, RIMS Kokyuroku 757 (1991)で研究代表者が導入した層 \beta_Y(\mathcal O_X) が応用できる．また，D-加群への理論の拡張も決定系のときに使用した加群の生成元と境界のところで切り落とすヘビサイド関数との形式積の満たす D-加群を考えることにより同様の議論が展開できる.

(2) 曲面の方程式系：曲面の満たす５階偏微分方程式系の解の解析では本研究費で購入した64GBのメモリーを積んだパソコンMac Pro と Mathematica, Maple という２つの数式処理ソフトを使うことによって具体的な解析をする.

(3) 蔵本予想：千葉理論の修正では非線形微積分発展方程式の線形化作用素 T と解の周波数分布変数に関する半解析性をうまく組み合わせる．そして古典的な吉田耕作の解析半群の理論をそのままでは適用できないがほぼ忠実に沿った議論を展開する事で厳密な一般化固有関数展開についての知見を得ることができる.

４．研究成果

(1) 混合問題：論文①（発表⑤）において D-加群に対する混合問題の座標不変な定式化を与えた．この定式化では主方程式系の D-加群 M と境界条件に当たる境界値方程式系の D-加群 N が与えられ適当な条件をみたすとき混合問題特有の第３の D-加群 M’が構成される．この M’に対する正則関数解の層複体のマイクロ台の上からの評価を得る事が境界条件をみたす佐藤超関数解の存在，一意性，超局所解析，特に境界に沿う解析的特異性の伝播の解析に直結する．本論文ではこの評価の際に必要な，いわゆる Shapiro-Lopatinsky 条件を M,N を擬微分作用素加群にまで係数を拡大したときのある種の同型対応になる事，として代数的に見易い形で与える事ができた．そして決定系のときはよく知られた条件と一致する事も示している．またこの定式化にとって不可欠な D-加群層 \beta_Y(\mathcal O_X)を解析的，圏論的など互いに同値な３種類の定義を与えた．詳し

い証明・応用は後の論文に譲るが基本的アイデアは詳しく述べられている．残念ながら回折現象などに関係した第２超局所解析への応用は未だ成功していないが論文②（発表⑦）に G. Lebeau の結果と非常に難解な証明方法の佐藤超関数論の立場からのわかりやすい解説を与えた．また図書①も回折現象や佐藤超関数，超局所解析のやさしい解説を与えている．

(2) 曲面の方程式系：これについてはいくつか数式処理により許される初期値の間の関係式などを求めたが研究期間の最初の頃に思いがけず日本数学会理事に選出され，それらの多忙な仕事が本研究期間ほぼすべてに加わった事によって思うように研究が進まず，まとまった成果をあげることができなかった．またこれは成果の見込める(1),(3)の研究を優先させたことにもよる．しかし今後は購入した機器・ソフトを使って成果をあげられる見通しである．図書①ではこの方程式系と幾何学的意味をやさしく解説している．

(3) 蔵本予想：発表①，②において千葉逸人の論文の一番の鍵となっているヒルベルト空間上の線形作用素 T の一般化固有値の遠方でのより正確な漸近形を与えた．これは一般化固有関数展開を厳密に証明しようとするときには是非とも必要である．詳しい証明は発表②の報告集に提出済みである．実際一番重要なガウス分布のときでも可算無限個の一般化固有値が複素平面上に現れるが原点からの距離が大きくなるにつれ隣り合う一般化固有値の距離は 0 に縮まっていく．従って固有値が載っていない曲線を探すにはより正確な位置情報が必要となる．また，振動子の周波数の初期分布がガウス分布以外のかなり一般的な指数型分布のときもそのような位置の特定ができることを馬田優との共同研究で発見している．さらにその後の研究で作用素 T の定める解析半群としての厳密な解析だけではなくもともとの非線形微積分発展方程式についても解の大域存在，一意性，周波数変数に関して上半平面へ解析接続可能，など千葉の論文でははっきりとは示されていなかったこともより一般な周波数の解析的初期分布に対して示すことができている．

(4) 論文③，発表③，④，⑥では修士課程大学院生山崎海斗との共同研究で佐藤超関数に対するエネルギー積分評価に関係した成果を得た．従来の佐藤超関数に対するエネルギー形式は実解析的パラメーターについて単に積分する L^2 ノルムでしかなかったが実質的に微分したものを積分するようなソボレフノルムにあたるものを与えた．本課題そのものではないが代数解析的に不等式を扱う，という点では関連の成果である．

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　3　件）

① Kiyoomi Kataoka, The functor $\beta_Y(\cdot)$ and mixed problems for ${\mathcal D}_X$-modules", 京都大学数理解析研究所講究録別冊 B61「Microlocal Analysis and Singular Perturbation Theory 」（研究代表者: 竹井義次（京大）), 査読あり，2016，97--108.

② Kiyoomi Kataoka, A review of the results on second analytic singularities in diffraction problems",京都大学数理解析研究所講究録別冊 B57「超局所解析の諸相」（研究代表者: 本多 尚文（北大 理)), 査読あり，2016，159--174.

③ Kiyoomi Kataoka, Sato Hyperfunctions and Reproducing Kernels", 京都大学数理解析研究所講究録 1980「再生核の応用についての総合的な研究」（研究代表者 齋藤三郎（群馬大)), 2016, 125-138.

〔学会発表〕（計　7　件）

①片岡清臣，馬田優，蔵本予想に関連する作用素の一般化固有値について，日本数学会 2018 年度年会　函数解析学分科会，東京大学駒場キャンパス March，2018.

②Kiyoomi Kataoka, Yu Mada, Some remarks on Hayato Chiba's theory about Kuramoto conjecture, 京都大学 RIMS 共同研究 「超局所解析と漸近解析 」（研究代表者: 岡田靖則（千葉大)), 京都大学数理解析研究所, October 2017.

③ Kiyoomi Kataoka, Sobolev forms for microfunctions with real analytic parameters and the microlocal energy method, 京都大学 RIMS 共同研究 「超局所解析と特異摂動論の新展開 」（研究代表者: 本多尚文（北大)), 京都大学数理解析研究所, October 2016.

④片岡清臣，佐藤超関数と再生核形式，京都大学 RIMS 共同研究「再生核の応用についての総合的な研究」（研究代表者 齋藤三郎（群馬大)), 京都大学数理解析研究所, October 2015.

⑤ Kiyoomi Kataoka, The functor $\beta_Y(\cdot)$ and mixed problems for $\mathcal{D}_X$-modules, 京都大学 RIMS 共同研究 「 Microlocal Analysis and Singular Perturbation Theory 」（研究代表者: 竹井義次（京大)), 京都大学数理解析研究所, October 2015.

⑥ 片岡清臣，山崎海斗，実解析的パラメーターをもつ佐藤超関数に対するソボレフ型２次形式と その応用，日本数学会秋季総合分科会函数解析学分科会，京都産業大学, September 2015.

⑦ Kiyoomi Kataoka, A review of the results on second analytic singularities

in diffraction problems，京都大学 RIMS 共同研究「超局所解析の諸相」(研究代表者：本多尚文(北大))，京都大学数理解析研究所, October 2014.

〔図書〕（計　１　件）
①片岡清臣，線形と非線形の偏微分方程式（超局所解析と代数解析），東京大学出版会「数学の現在 e」(斎藤毅(東大数理)編集), 第 11 講，2016，pp.169-187.

〔産業財産権〕

○出願状況（計　　０件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計　　０件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織
(1)研究代表者
　片岡　清臣（KATAOKA KIYOOMI）
東京大学・大学院数理科学研究科・名誉教授
　研究者番号：60107688

(2)研究分担者
　　　　　　　(　　　)

　研究者番号：

(3)連携研究者
　　　　　　　(　　　)

　研究者番号：

(4)研究協力者
　　　　　　　(　　　)