

平成 30 年 6 月 18 日現在

機関番号：13901

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2014～2017

課題番号：26400113

研究課題名(和文)量子状態の遷移確率とその漸近挙動

研究課題名(英文)Transition probability among quantum states and their asymptotic behavior

研究代表者

山上 滋 (Yamagami, Shigeru)

名古屋大学・多元数理科学研究科・教授

研究者番号：90175654

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：有限自由度系から無限自由度系まで広く量子現象を記述する量子代数の表現論は基本的な重要性を有しており従来より様々な研究がなされてきたところである。  
本研究課題においては、古典系におけるガウス測度に相当する準自由状態とそれに伴う表現について、状態間相互の遷移確率を与える閉じた公式を手がかりに、それを解析する際に必要となる非可換積分論の整備並びに表現に関する二分律を始めとしたいいくつかの重要な性質を解明した。

研究成果の概要(英文)：In a mathematical treatment of quantum phenomena ranging from finite to infinite freedom systems, representation theory of relevant quantum algebras bears fundamental importance and lots of investigations have been pursued.  
In the present research, we focus on quasi-free states, which are quantum analogues of classical Gaussian measures, together with transition probability among them and have obtained several remarkable results concerning the related quantum probability and the dichotomy criterion on quasi-free representations.

研究分野：量子解析学

キーワード：量子状態 遷移確率 非可換積分論

## 1. 研究開始当初の背景

量子代数という言葉が何を意味するかは状況によって異なるであろうが、ここでは最も基本的と思われる正準交換関係 (canonical commutation relations) あるいは正準反交換関係 (canonical anti-commutation relations) によって生成される代数 (以下、CCR 代数、CAR 代数と呼ぶ) について考える。これらは、生成元が有限であるか無限であるかによって有限自由度あるいは無限自由度と区別して扱われる。CAR 代数の場合は、有限次元あるいは無限次元と呼んでも同じことであるが、CCR 代数はいずれの場合も無限次元であるにもかかわらず、その代数構造に大きな違いが生じるからである。実際、有限自由度の場合には既約表現の一意性が成り立ち (Clifford 代数の構造定理、Stone-von Neumann の定理)、したがっていずれの量子代数も比較的単純な構造を有する。

一方、無限自由度の場合には、そのような既約表現の一意性は全く成立しない。のみならず、既約分解の一意性が保証されない、いわゆる非 I 型と呼ばれる極めて野性的な表現をもつものであることが知られている。そういった非 I 型表現というのは、特殊な病理的例ということではなく、量子統計物理の観点からも熱力学的平衡状態を記述する際に自然な形で現れる。

その量子代数の表現論であるが、物理的意味が明確でかつ最も詳しく調べられてきたのが、実質的な相互作用項を持たない準自由状態に関連するものである。

今回の研究を始めた時点において、この準自由状態間の遷移確率が、量子代数に関する非可換積分論を用いて定式化され、状態の二次モーメントを使って具体的に表す公式が得られつつあった。

Shigeru Yamagami, Geometry of coherent states of CCR algebras, Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top., 15 (2012), 1250009, 9 pp.

## 2. 研究の目的

上記背景を踏まえて、本研究課題における目標は以下の通りである。

(1) 遷移確率は、非可換積分論を使えば、 $\langle \varphi^{1/2} \psi^{1/2} \rangle$  といった期待値表示をもつのであるが、この形を一般化して  $\langle \varphi^t \psi^{1-t} \rangle$  という量を  $0 \leq t \leq 1$  に対して考えることもできる。準自由状態の場合に、このパラメータを持った量がどのように閉じた形で書けるかについて考えてみたい。

(2) 上掲のべき乗補間式であるが、 $\psi$  が正則表現を与えるような場合には、形式的ながら  $\varphi^t \psi^{1-t}$  における  $t$  の範囲を  $t > 0$  にまで拡張することが少なくとも有限自由度の場合には可能であり、統計物理学で問題にするところの温度のパラメータを持った平衡状態を記述するものと考えられる。そこで、この量について、無限自由度の場合の数学的に厳密な扱いを可能ならしめるために、ここでは  $\psi$  として、正則表現に対応する非有界トレース汎関数  $\omega$  を取り、 $\varphi$  として、準自由状態をとったときに、状態の流れ  $\varphi^{(t)} = \varphi^t \omega^{1-t}$  ( $t > 0$ ) が再び準自由状態で表わされることを示し、 $t \rightarrow \infty$  あるいは  $t \rightarrow +0$  のときの流れの漸近挙動を共分散形式を用いて具体的に記述することを目指す。

## 3. 研究の方法

この無限自由度の量子系を記述し得る最も適切な数学的道具立ては作用素環と呼ばれるもので、ここでもその手法並びに成果を最大限利用する。とくに量子確率論とも称される非可換積分論は、量子系の熱平衡状態の数学的解釈の上で基本的に重要であり、さらにまた量子対称性を取り扱う上でも重宝するものとなっている。

一方でまた、有限自由度系との繋がりもまた重要で、無限自由度系を有限自由度系からの極限として捉える方法が基本的でここでもそれを踏襲した。その際に、様々な作用素的な量が近似されることを保証する条件があると都合が良く、これについても作用素環的収束の概念が有効となる。

有限自由度系について言えば、ワイル型

たたみ込み積を付与した量子代数が基本的で、既に膨大な蓄積があるとは言え、これを徹底的に調べておくことは、今なお重要な課題である。この von Neumann にまで遡るたたみ込み積環は、正準形式を通じて、交代形式群とそれにまつわる双曲幾何学と密接に結びついており、量子状態のもつ幾何学的側面を理解する上でも重要である。

こういった基礎的な研究手段ではあるが、実際の適用においては、様々な工夫・改変が必要となる。これについては、連携研究者を初めとする内外の専門家の助力も得て、枝葉と本体を見極めながら、取り行った。

#### 4. 研究成果

(1) CCR 代数上のガウス状態（分散形式と期待値汎関数で特徴づけられるある種の準自由状態）の相互関係は、同値であるか無縁の二種類のみであるという二分律の証明の全貌を明らかにした。結果そのものは、既に公表されていたのであるが、証明の方針を見直し、中心分解に基づく積分公式に還元するという手法により、作用素の非線型評価をかなり減らすことに成功した。また還元公式を精査する過程で、作用素環一般の表現の構造を状態間の遷移確率と結びつけて研究する方法論が、これまで以上に富田・竹崎理論の主定理と密接に関係することを見出した。遷移確率そのものは、Pusz-Woronowicz の方法により、きわめて初等的に導入可能なものとなっており、それは、正值形式の幾何平均を経由するものである。とくに、正值形式が作用素環上の状態に付随するものである場合には、作用素環の構造を反映した特殊な形の両線型形式に対して強い正值性が成り立つことが、von Neumann 環の正錐の理論等から示される。今回、認識を新たにした部分は、その逆も成り立つという点で、強い正值性から富田・竹崎の主要結果が代数的に示されることが判明した。残念ながら、両線型形式に対する強い正值性は非自明なもので、今のところ、富田・竹崎理論を経由する証明以外は

知られていないのであるが、広く非有界作用素環についても成り立つという見通しが得られた。(その他 [2, 3, 4])

(2) 無限自由度系の場合、量子状態は様々な相の存在を反映して非同値なものが数多く出現する。その違いを数学的に記述する道具立てとして、作用素環における量子確率の理論がある。その基礎に関わる Haagerup の跡公式について、非可換積分の立場からその成り立つ仕組みを解明することができた。

Haagerup の公式自体は、ある特殊な非有界作用素のスペクトル射影の跡値を与えるものではあるが、非可換積分論全体の礎石をなす重要なものである。従来はその成り立つ根拠が、巧妙な式操作の影に隠れて十分把握されたとは言いがたい状況であった。その理由一つに、竹崎双対上の標準跡の構成自体が非可換積分論の成果の上に築かれているという、相互依存の状況がある。

今回、この標準跡の構成を、複素補間法とフーリエ解析の手法を駆使することで、古典的なヒルベルト代数の理論に還元させることができた。その応用として、跡公式が、Haagerup の扱った場合も含めて広く成り立つものであることが明らかとなった。(論文 [1]) また、これに関連して、双加群テンソル圏の定式化の簡略化を与えることも成し得た。(論文 [2])

(3) 量子状態の力学的発展は、一径数ユニタリー群により記述されるのであるが、その作用素環的定式化においてはユニタリー作用素のスペクトル分解と状態を記述する密度作用素との関係が重要である。これに関連して、スペクトル測度がいつテンソル測度に持ち上がるかという数学的にも興味ある問題に対する満足のいく解答を得た。結果は、密度作用素の場合を越えてヒルベルト・シュミット型の場合にまで持ち上げ可能で、それが持ち上げ問題の限界クラスであるというものである。(その他 [1])

(4) 量子代数の構造は、その自由度が有限であるか無限であるかで大きく異なるのであるが、その解析においては、それでもな

お有限自由度の場合の様々な具体的計算が重要である。その中でも、von Neumann に由来する正準量子代数の射影元の意味を明らかにした。これは、正準交換関係の一意性と呼び習わされる古典的結果についての一解釈という側面をもち、当然既に知られていておかしくない内容ではあるが、意外にもこれまでのところ見過ごされていたようで、このことに言及した文献は見つからなかった。具体的には、つぎのようなことが判明した。von Neumann の射影元は、特別な形をしたガウス関数に伴うもので、正準量子代数の極小射影を与えるものになっている。このことは、射影元をフォック表現の場合に具体的に計算すれば、真空ベクトルへの一次元射影に他ならないという事実とも符合している。今回新たに明らかにしたのは、この von Neumann の射影元を含む形で正準量子代数の行列単位を構成することができた点、さらに、こうして得られた行列単位から生成された  $C^*$ 環が正準量子代数の生成する  $C^*$ 環と一致するという点である。この正準量子  $C^*$ 環がコンパクト作用素環であることは、専門家の間では常識とっていいものではあるが、その生成元としての行列単位を具体的に構成した点は、それに関連した様々な計算手法を見通しよくするものである。その構成方法であるが、たたみ込み積による量子代数の表示において、Weyl の与えたユニタリ元をデルタ関数的にあるいは作用素環における掛算環の元として付加し、さらにガウス関数の解析性を利用して Weyl ユニタリのパラメータに関する複素正則部分と反正則部分に分解することで、von Neumann の射影元を coherent ベクトルを使った階数 1 作用素に値を取るように複素正則的な拡張が存在することを示す。こうすることで、求める行列単位が複素パラメータについてのテイラー係数として実現されることが示された。これについては、公表の準備中である。

## 5. 主な発表論文等

[雑誌論文] (計 2 件)

- [1] S. Yamagami, Around trace formulas in non-commutative integration, Publ. RIMS, 査読有, 54(2018), 181–211.
- [2] Y. Sawada and S. Yamagami, Notes on the bicategory of  $W^*$ -bimodules, arXiv:1705.05600, to appear in J. Math. Soc. Japan, 査読有.

[その他] (計 4 件)

- [1] S. Yamagami, Notes on tensor product measures, arXiv:1701.03215.
- [2] S. Yamagami, I remember Clifford algebra, preprint.
- [3] S. Yamagami, Free states on quantum algebras, preprint.
- [4] S. Yamagami, Operator algebras and their representations, preprint.

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

山上 滋 (YAMAGAMI Shigeru)  
名古屋大学・多元数理科学研究科  
・教授  
研究者番号 : 90175654

### (2) 連携研究者

松井 卓 (MATSUI Taku)  
九州大学・数理学研究院・教授  
研究者番号 : 50199733

渚 勝 (NAGISA Masaru)  
千葉大学・理学研究科・教授  
研究者番号 : 50189172

日合 文雄 (HIAI Fumio)  
東北大学・名誉教授  
研究者番号 : 30092571