

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 30 年 6 月 18 日現在

機関番号：12102

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2014～2017

課題番号：26400116

研究課題名(和文) 対称空間上のシュレディンガー方程式の幾何解析的構造の解明とその応用

研究課題名(英文) Elucidation of the geometric and analytic structure of Schroedinger equations on symmetric spaces and its applications

研究代表者

寛 知之 (KAKEHI, Tomoyuki)

筑波大学・数理工学系・教授

研究者番号：70231248

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文)：この研究において、本研究の研究代表者は対称空間上のシュレディンガー方程式の幾何解析に密接に関係する次の2つの課題(A)、(B)を研究した。(A)対称空間上の平均値作用素。(B)フラクショナル・ラプラシアンを持つある種の反応拡散系。簡単に述べると、我々の結果は以下の通りである。(A)非コンパクトな対称空間上の滑らかな関数の空間上の作用素として、平均値作用素が全射であることを示した。(B)ある条件の下での時間大域解の存在を示し、また、解の爆発に対する臨界指数を決定した。更に、爆発解の存在時間に関する最良評価を与えた。

研究成果の概要(英文)：In this research, we studied the following two subjects (A) and (B) which are closely related to geometric analysis of Schoedinger equations on symmetric spaces.(A) Mean value operators on symmetric spaces. (B) A certain reaction-diffusion system with the fractional Laplacian. Briefly our results are as follows.(A) We proved that under some conditions the mean value operator is surjective as an operator on the space of smooth functions on noncompact symmetric spaces. (B) We proved the existence of a global in time solution under some conditions on the nonlinear terms. We also determined the critical exponent for blowup of the solution. Moreover, we gave the optimal estimate for the lifespan of the blowup solution.

研究分野：微分方程式

キーワード：対称空間 シュレディンガー方程式 基本解 幾何解析 ガウス和

## 1. 研究開始当初の背景

良く知られているように(時間発展型)シュレディンガー方程式の解を大域的かつ明示的に構成することは実質的に不可能であり、調和振動子等幾つかの例で基本解の具体的な形が知られているのみである。故に基本解の特異性を具体的に調べるという研究は、谷島賢二氏による超2次型ポテンシャルを持つ1次元シュレディンガー方程式に関する結果など幾つかの結果を除いて今までに意味のある進展はなかった。(K. Yajima, CMP, (1996)参照) 同様の事はリーマン多様体上のシュレディンガー方程式についても言える。本研究の申請者は、ここ数年対称空間と呼ばれるある種のリーマン多様体上の時間発展型シュレディンガー方程式の基本解について幾何学的、および、表現論的な視点から研究を続けてきた。そして、自由粒子に対するシュレディンガー方程式に対して大域的かつ明示的に基本解を表示することに成功し、その系として以下の結果を得た。[定理]  $M=U/K$  をルート系が偶数重複度条件を満たすコンパクト対称空間とし、 $M$  上の自由粒子に対応する時間発展型シュレディンガー方程式の基本解を  $E(t,x)$  とする。すると、 $M$  の幾何学的な構造から決まる定数  $c > 0$  が存在し、次の[I] [II]が成り立つ。

[I]  $t/c$  が有理数の時、 $E(t, \cdot)$  の ( $M$  上の超関数と見たときの) 台は、 $M$  の低次元部分集合となる。しかも、この低次元集合は一般化されたガウス和を用いて具体的に与えられる。  
[II]  $t/c$  が無理数の時、 $E(t, \cdot)$  の台および特異台は  $M$  全体と一致する。

上記で述べたように、コンパクトリーマン多様体上のシュレディンガー方程式の基本解については、自由粒子に対応する場合ですら詳しいことは判っていない。これは、ハミルトン流の捕捉条件が強い場合、基本解を超局所的に解析することが困難であることに起因する。にも拘らず、上記の結果によって、高い対称性を持つシュレディンガー方程式の場合、対称性が関わる何らかのメカニズムにより基本解を具体的に構成することが可能となり、更に、基本解はある種の幾何的、かつ、代数的な構造を持つのではないかと考えるに至った。

## 2. 研究の目的

本研究の当初の研究目的について述べる。第一の研究目的は、対称空間上のシュレディンガー方程式の基本解を大域的かつ明示的に構成し、対称空間特有の幾何構造との関係を明らかにすることである。特に、基本解の特異性、台 (support) および特異台 (singular support) の構造を幾何的、表現論的に記述することを主な目的とする。そして第二の目的は、得られた結果を偏微分方程式の問題および対称空間上の調和解

析の問題へ応用することである。具体的には、(1) 多様体上のシュレディンガー型方程式の  $L^2$  適切性に関する未解決問題の解明、(2) コンパクト対称空間上のラプラシアン固有値とその双対である非コンパクト対称空間上のラプラシアンのレゾナンスを解析接続で結びつけるという Zworski 予想のある枠組みの中での解明、以上2つの問題の解決を目的とする。

## 3. 研究の方法

以下は、当初予定していた研究の方法である。但し、実際に研究を行うと良くあることであるが、研究方法に様々な変更を加えねばならず、また、得られた結果も当初の予定とは異なるものとなった。

第1段階として、コンパクト対称空間上の自由粒子に対するシュレディンガー方程式および磁場付きシュレディンガー方程式の基本解を構成し、その特異性を調べる。第2段階では、第1段階の成果をもとに非コンパクト対称空間上のシュレディンガー作用素のレゾナンスとその双対であるコンパクト対称空間上のシュレディンガー作用素の固有値を対応付け、解析する。(Zworski 予想の研究) そして、対称空間上のシュレディンガー型方程式の  $L^2$  適切性の問題を考察する。この計画のために、連携研究者と定期的に情報交換するとともに、岡山大学のセミナーや数理解析研究所の作用素論セミナーなどで定期的に成果を発表することにより討論を深め、研究目的の達成に尽力する。

実際には、対称空間上の球関数のスペクトルパラメータに関する挙動を調べることが重要であると判断したため、関連する平均値作用素を用いた研究を行う事となった。また、シュレディンガー方程式の分散性を調べるために、ある種の拡散方程式系の解の挙動を調べることになった。

## 4. 研究成果

(1) 非コンパクト対称空間上の平均値作用素について研究を行った。

平均値作用素は波動方程式の解の公式を始め微分方程式の解を構成する様々な局面で現れる積分作用素である。日本ではあまり知られていないことではあるが、平均値作用素それ自身が、積分幾何、幾何解析、およびトモグラフィーの分野では重要な研究対象となっており、特にトモグラフィーの分野では、Sonar Transform とも呼ばれ、現在でも活発に研究されている。主要な研究課題は、平均値作用素の像を与えたとき、原像をなるべく正確に構成することである。

本研究では、非コンパクト対称空間上の平均値作用素の全射性について研究を行い、ある枠組みで肯定的な結果を得た。以下に得られた結果の概略を説明する。

簡単のため、 $X = G/K$  を階数 1 の非コンパクト対称空間とする。そして  $f(x) \in C(X)$  をとる。 $r > 0$  を固定し、各  $x \in X$  に対して、 $x$  中心、半径  $r$  の測地球面上で  $f$  を積分するという平均値作用素を  $M^r f(x)$  と書くことにする。これで、平均値作用素  $M^r : C(X) \rightarrow C(X)$  が定まる。得られた結果は次の通りである。

**定理** 平均値作用素  $M^r : C(X) \rightarrow C(X)$  は全射である。

一般の非コンパクト対称空間上でも平均値作用素  $M^r$  を定義できる。ただし、この場合  $r$  はワイル領域の元であり、階数と同じ数の変数を持つパラメータである。この一般化された平均値作用素に対しても同様な結果が（少し仮定を強くする必要があるが）成立する。尚、この研究は、Fulton Gonzalez 氏(Tufts 大学)、Jens Christensen 氏(Colgate 大学)との共同研究である。(論文 参照) 対称空間上のシュレディンガー方程式を研究するに当たって、対称空間上の帯球関数の挙動を調べることが重要となる。実は、平均値作用素を畳み込み作用素と見たときの積分核に現れる超関数のフーリエ変換が帯球関数となる。この意味で、平均値作用素について得られた上記の結果はシュレディンガー方程式の基本解を研究するための重要なステップとなる。この研究は、本研究の研究年度が終了しても続行する予定である。

(2) シュレディンガー方程式は典型的な分散型方程式であり、周波数に関して高エネルギー部分と低エネルギー部分に分けて粒子の運動を考察する必要がある。この意味で似た構造を持つ拡散型方程式系を簡単なモデルケースとして考えることにした。具体的には、以下のような形のある種の半線形反応拡散系の解について詳細な性質を調べた。

$$\begin{cases} u_t + (-\Delta)^p u = v^q, & v_t + (-\Delta)^q v = u^p, \\ u(0, x) = u_0(x), & v(0, x) = v_0(x) \end{cases}$$

$0 < u_0(x), 0 < v_0(x)$  は小さい初期値であり、パラメータ  $\alpha$  は  $0 < \alpha < 1$  を満たす。そして、非線形項の指数  $p, q$  は  $1 < p, 1 < q, 1 < pq$  を満たすとする。この方程式系に関して、時間大域解を持つための条件、解の爆発が起こる臨界指数、更にライフ・スパンの決定など幾つかの重要な結果を得たが、指数の都合で解の爆発に関する臨界指数の結果を述べる。

**定理**  $1 < p, 1 < q$  を仮定する。

$n/2 > (\max\{p, q\} + 1)/(pq - 1)$  であれば、どのような非自明な初期値に対しても解は有限時間で爆発する。

この研究を始めた当初、パラメータ  $\alpha$  が小さいと拡散項  $(-\Delta)^\alpha$  の作用が弱くなり、爆発が起こりやすくなると予想されたが、驚くべきことに、上記の結果より、パラメータ  $\alpha$  が小さくなると、むしろ爆発は起こりにくくなる、という事が判明した。

参考までに、 $n/2 > (\max\{p, q\} + 1)/(pq - 1)$  であれば、十分小さい初期値に対して時間

大域解が存在する、という事も示した。

(論文 参照)

尚、これは大下承民氏(岡山大学)との共同研究による。

(3) コンパクト対称空間上のシュレディンガー方程式の基本解に現れる一般化されたガウス和とシュレディンガー方程式との関係を調べた。(論文 参照) 尚、基本解に現れる一般化されたガウス和について、相補公式を与えた。ただし、結果を述べたのみで、これに関しては証明も含めて論文を準備中である。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 3件)

Jens Christensen, Fulton Gonzalez, and Tomoyuki Takehi, "Surjectivity of mean value operators on noncompact symmetric spaces.", *Journal of Functional Analysis*, 272, no. 9, 3610-3646, (2017). doi:

<https://doi.org/10.1016/j.jfa.2016.12.022> 査読有.

Tomoyuki Takehi and Yoshihito Oshita, "Blowup and global existence of a solution to a semilinear reaction-diffusion system with the fractional Laplacian", *Mathematical Journal of Okayama University*, 59, 175-218, (2017). 査読有.

Tomoyuki Takehi, "Schrödinger equations on compact symmetric spaces and Gauss sums". *Nonlinear dynamics in partial differential equations, Advanced Studies in Pure Mathematics*, 64, 311-318, (2015). 査読有.

[学会発表](計 5件)

"平均値作用素の全射性について", 岡山 - 広島解析・確率論セミナー2017年2月21日,

"Schrödinger equation on certain compact symmetric spaces", Colloquium at University of Massachusetts Boston, USA, 2016年3月

"Construction of the fundamental solution to the Schrödinger equation on compact symmetric spaces and related problems", 研究集会「第1回解析学の耳袋」, 沼津市プラサヴェルデ, 2015年1月.

"Fundamental solution to the Schrödinger equation on compact symmetric spaces", *Inverse Problems and Related Topics*, Euler Institute, St.

Petersburg, Russia, 2014 年 8 月  
“Schroedinger equation on compact  
symmetric spaces and reciprocity for  
Gauss sums ”, Geometric and Singular  
Analysis, Potsdam University,  
Germany 2014 年 3 月

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 0 件)

取得状況(計 0 件)

## 6 . 研究組織

### (1)研究代表者

笥 知之 (KAKEHI, Tomoyuki)  
筑波大学・数理物質系・教授  
研究者番号：70231248

### (2)研究分担者

田村 英男 (TAMUR, Hideo)  
岡山大学, 自然科学研究科, 特命教授  
研究者番号：30022734

### (3)連携研究者

清原 一吉 (KIYOHARA, Kazuyoshi)  
岡山大学, 自然科学研究科, 教授  
研究者番号：80153245

### (4)連携研究者

山田 裕史 (YAMADA, Hirofumi)  
熊本大学・大学院先端科学研究部(理)・教授  
研究者番号：40192794

### (5)研究協力者

フルトン・ゴンザレス (GONZALEZ, Fulton)  
タフツ大学 (アメリカ合衆国) 数学教室・  
教授