

令和元年6月24日現在

機関番号：32641

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2014～2018

課題番号：26400122

研究課題名(和文)特殊関数の新局面

研究課題名(英文)New aspects of special functions

研究代表者

竹村 剛一 (Takemura, Kouichi)

中央大学・理工学部・准教授

研究者番号：10326069

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：特殊関数は初等関数に続く重要な関数たちの総称であるが、その中でもホインの微分方程式、パルヴェ方程式、そしてこれらのq-変形について研究成果を挙げた。超離散パルヴェ第二方程式に対しては、解の挙動を考察した。また、Ruijsenaars-van Diejen系の退化をもとにq-ホイン方程式とその変異形を導出し、q-差分パルヴェ方程式との関係と、確定特異点や見かけの特異点を差分化したものからの特徴付けについて結果を得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義

超離散パルヴェ第二方程式における成果は、q離散パルヴェ方程式やパルヴェ方程式の解に対する研究への応用につながると考えている。また、q-ホイン方程式の研究は、Luc Vinet, Alexei Zhedanovらの別の動機からの研究にも関係しており、今後の発展につながる可能性がある。潜在的には、新たな特殊関数として物理学などへの応用が期待される。

研究成果の概要(英文)：Special functions are the important function as well as the elementary functions. We obtained several results on Heun's differential equation, Painleve equations and their q-deformations.

We investigated the asymptotics of the solutions to the ultradiscrete Painleve II equation. We introduced q-Heun equation and its variants by degenerations of the Ruijsenaars-van Diejen system. We also obtained the results on the relationship with the q-Painleve equations and on the characterization of the variants of q-Heun equation in terms of the difference analogue of the regular singularity and the apparent singularity.

研究分野：特殊関数

キーワード：ホインの微分方程式 パルヴェ方程式 超離散方程式 q差分 q-Heun equation Ruijsenaars syst
em 可積分系 特殊関数

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

特殊関数は初等関数に続く重要な関数たちの総称であり、超幾何関数や楕円関数とその例として挙げられる。

現代での新たな特殊関数へ向けた研究として、パンルヴェ方程式の解析が挙げられる。この方程式は、解として現れる動く(時間変数に依存する)特異点は極のみに限るといふ著しい性質(パンルヴェ性)をもっている。

他の新たな特殊関数の候補としてホインの微分方程式の解が挙げられる。ここで、ホインの微分方程式とはリーマン球面上4点に確定特異点をもつ二階線形常微分方程式の標準形である。3点に確定特異点をもつ場合は超幾何微分方程式に対応してさまざまな研究がなされているが、ホインの微分方程式にはアクセサリーパラメータと呼ばれるものが入っており、これがあることで大域的な解のようすを詳しく調べる問題などが、難しくて深いものとなっている。研究代表者は、過去にホインの微分方程式に対して研究を行っており、一定の成果を得てきた。また、ホインの微分方程式における特異点の合流により、さまざまな合流型のホインの微分方程式が得られる。ホインの微分方程式やその合流型は量子力学や一般相対論などにおいても現れ、より深い解明が期待されている。

2. 研究の目的

本研究では特殊関数の世界を広げていき、パンルヴェ方程式やホインの微分方程式、そしてこれらに関連する方程式(q-変形された方程式や超離散化された方程式、量子パンルヴェ方程式など)の解や性質を解明していく。

さらに、これらの方程式やその周辺についての基礎を整備し、様々な物理のモデルや関係する数学的対象への応用にあたり良い見通しが得られるようにする。

3. 研究の方法

超幾何関数においてq-変形が定義されており、q-変形のほうがよい見通しを与えることがあるが、パンルヴェ方程式においても適切なq-変形が定められている。q-パンルヴェ方程式の解については、超幾何解とよばれる特殊解以外にはほとんど研究がなされていなかった。

本研究では、 $q \rightarrow 0$ という超離散極限を考えることで超離散版のパンルヴェ方程式の解のようすを調べていき、引き続きq-パンルヴェ方程式については通常のパンルヴェ方程式の解を解明につなげるための基礎を作る。

また、ホインの微分方程式についてもq-変形された差分方程式を確立させ、q-変形の世界での解の解析を進めたうえで、その超離散方程式を得て調べることによってホインの微分方程式自体の理解を深めていく。

4. 研究成果

2014年度は、多添字ヤコビ多項式などについて研究成果を得ることができた。

ヤコビ多項式は直交多項式の典型的な例であり、超幾何型微分方程式を満たすことや三項間漸化式を満たすことなど著しい数学的な性質をもつ。他方、量子物理のモデルにも固有関数として現れる。佐々木隆らは、いわゆるダルブー変換の考えかたを用いてヤコビ多項式に付随するモデルなどから新たな可積分なモデルを系統的に導出したが、この過程において多添字ヤコビ多項式などの新しい直交多項式系を見出し、その性質を研究してきた。研究代表者は佐々木の研究に触発され、共同研究などを通じて多添字ヤコビ多項式とホインの微分方程式の関係を調べてきたが、研究の途上に添字が違って本質的に同じ多項式が現れることを見出してきた。この現象を組織的に研究し、2組のマヤ図形を用いて多添字ヤコビ多項式の等式を記述することに成功した。

2015年度は、q-差分化されたパンルヴェ方程式やこれを超離散化した方程式の解について、より詳しくはq-離散パンルヴェ第二方程式と符号付き超離散パンルヴェ第二方程式について、中央大学大学院生(当時)の五十嵐光氏と法政大学の礪島伸氏との共同研究において結果を得ることができた。

q-離散パンルヴェ第二方程式の特殊解について、Hamamoto, Kajiwara, Witte による行列式型の特殊解が知られている。この行列式解において各成分がq-エアリー方程式の解となっているのであるが、先行研究で礪島らはq-エアリー方程式の解がq-Ai関数やq-Bi関数の場合に、対応するq-離散パンルヴェ第二方程式の解における超離散化の計算を行い、符号付き超離散パンルヴェ第二方程式の特殊解の具体形を計算した。

本研究において、q-エアリー方程式の解としてq-Ai関数とq-Bi関数の線形結合をとってきた

場合を考察した。この場合において対応する q -離散パルヴェ第二方程式の解における超離散化の計算を行い、符号付き超離散パルヴェ第二方程式の特殊解の具体形を得ることができた。その結果、解の途中に波形をもつものが組織的に現れることがわかり、先行研究と比べて解の豊富な構造を見出すことに成功した。

2016年度は、五十嵐光氏との共同研究を引き続けていった結果、超離散パルヴェ第二方程式の解の様子についてさらに解明していくことができた。法政大学の礪島伸氏も含めた共同研究では符号付き超離散パルヴェ第二方程式の特殊解の具体形を、対応する q -離散パルヴェ第二方程式の解からの極限として計算したが、2016年度の研究では符号付き超離散方程式から直接的に解を計算し、2パラメータ解の導出や解の安定性について結果を得た。

ホインの微分方程式は、複素平面に無限遠点を付加したリーマン球面上に4点に確定特異点をもつ2階線形常微分方程式の標準形であるが、これには楕円関数を用いた表示も知られている。この楕円関数を用いた表示から Inozemtsev 系という量子可積分系がホインの微分方程式の多変数化とみなせ、これの差分化として Ruijsenaars-van Diejen 系が知られている。2016年から研究代表者は Ruijsenaars-van Diejen 系の4種類の退化構造を探求し、これが q 差分パルヴェ方程式を生み出す線形 q 差分方程式の特殊化として得られることを示した。そして、一変数の Ruijsenaars-van Diejen 系の退化版がホインの微分方程式の q 差分化とみなせること、およびその妥当性を示すことができた。結果として第四の退化によって q ホイン方程式を導出でき、これは q 差分パルヴェ第六方程式を導出する線形 q 差分方程式の特殊化によっても導出できることがわかった。

2017年度は、これらの結果についての原稿を練り上げ、学術雑誌に掲載することができた。さらに中央大学大学院生(当時)の小嶋健太郎氏と佐藤司氏との共同研究により、 q ホイン方程式の多項式的解を導出し、超離散極限(q を $+0$ に移行する極限)を用いて解明を試みた。

2018年度に出版された論文「On q -deformations of Heun equation」では、この退化において2回退化のものと3回退化のものについて、確定特異点や見かけの特異点の理論を差分化したものからの特徴付けを行った。4回退化の q ホイン方程式においては、 $q \rightarrow 1$ の極限で4点 $\{0, 1, t_1, t_2\}$ に確定特異点をもつフックス型微分方程式、すなわち標準形でのホインの微分方程式が得られるが、3回退化においては $q \rightarrow 1$ の極限で無限遠点が特異点でない4点 $\{0, t_1, t_2, t_3\}$ に確定特異点をもつフックス型微分方程式が現れること、および2回退化においては $q \rightarrow 1$ の極限で原点および無限遠点が特異点でない4点 $\{t_1, t_2, t_3, t_4\}$ に確定特異点をもつフックス型微分方程式が現れることがわかった。 q 差分方程式においては微分方程式の場合とは違って原点および無限遠点が特別な特異点となると考えられ、このことが退化の構造と整合的であることがわかった。

5. 主な発表論文等

[雑誌論文](計8件)

[1] [Takemura Kouichi](#), On q -Deformations of the Heun Equation, Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications, 14, 061 (2018) 1-16, 10.3842/SIGMA.2018.061 (査読有)

[2] Chen Zhijie, Kuo Ting-Jung, Lin Chang-Shou, [Takemura Kouichi](#), Real-root property of the spectral polynomial of the Treibich-Verdier potential and related Problems, Journal of Differential Equations 264 (2018) 5408-5431, 10.1016/j.jde.2018.01.005 (査読有)

[3] Chen Zhijie, Kuo Ting-Jung, Lin Chang-Shou, [Takemura Kouichi](#), On reducible monodromy representations of some generalized Lamé equation, Mathematische Zeitschrift 288 (2018) 679-688, 10.1007/s00209-017-1906-z (査読有)

[4] Igarashi Hikaru, [Takemura Kouichi](#), On two-parameter solutions of simultaneous ultradiscrete Painlevé II equation with parity variables, Journal of Mathematical Physics, 59 (2018) 103502, 10.1063/1.5020867 (査読有)

[5] [Takemura Kouichi](#), Degenerations of Ruijsenaars-van Diejen operator and q -Painlevé equations, J. Integrable Systems 2 (2017) xyx008, 10.1093/integr/xyx008 (査読有)

[6] [Takemura Kouichi](#), Integral transformation of Heun's equation and some applications,

J. Math. Soc. Japan 69 (2017) 849-891, 10.2969/jmsj/06920849 (査読有)

[7] Igarashi Hikaru, Isojima Shin, Takemura Kouichi, New Airy-type solutions of the ultradiscrete Painleve II equation with parity variables, J. Phys. A, 49 (2016) 145207, 10.1088/1751-8113/49/14/145207 (査読有)

[8] Takemura Kouichi, Multi-indexed Jacobi polynomials and Maya diagrams, J. Math. Phys. 55 (2014) 113501, 10.1063/1.4899082 (査読有)

〔学会発表〕(計 8 件)

[1] 竹村 剛一, On q-deformations of the Heun equation, 日本数学会 2018 年度秋季総合講演会無限可積分系セッション, 2018 年

[2] 小嶋 健太郎, 佐藤 司, 竹村 剛一, q ホイン方程式の多項式解について, 日本数学会 2018 年度年会無限可積分系セッション, 2018 年

[3] Zhijie Chen, Ting-Jung Kuo, Chang-Shou Lin, 竹村 剛一, Real-root property of the spectral polynomial of the Treibich-Verdier potential and related problems, 日本数学会 2018 年度年会無限可積分系セッション, 2018 年

[4] 竹村 剛一, Degenerations of Ruijsenaars-van Diejen operator and q-Painleve equations, 日本数学会 2017 年度秋季総合講演会無限可積分系セッション, 2017 年

[5] 五十嵐 光, 竹村 剛一, On solutions of ultradiscrete Painleve II equation with parity variables, 日本数学会 2017 年度秋季総合講演会函数方程式論分科会, 2017 年

[6] Takemura Kouichi, Degenerations of Ruijsenaars-van Diejen operator, q-Painleve equations and q-Heun equations, Elliptic Hypergeometric Functions in Combinatorics, Integrable Systems and Physics, 2017 年 03 月 23 日 Vienna, Austria

[7] 五十嵐 光, 磯島 伸, 竹村 剛一, New Airy-type solutions of the ultradiscrete Painleve II equation with parity variables, 日本数学会 2016 年度年会函数方程式論分科会 2016 年

[8] 竹村 剛一, Multi-indexed Jacobi polynomials and Maya diagrams, 日本数学会 2014 年度秋季総合分科会無限可積分系セッション, 2014 年

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況 (計 0 件)

取得状況 (計 0 件)

〔その他〕 なし

6. 研究組織

(1) 研究分担者 なし

(2) 研究協力者

研究協力者氏名: 磯島 伸

ローマ字氏名: Isojima Shin

研究協力者氏名: 五十嵐 光

ローマ字氏名: Igarashi Hikaru

研究協力者氏名： 小嶋 健太郎
ローマ字氏名： Kojima Kentaro

研究協力者氏名： 佐藤 司
ローマ字氏名： Sato Tsukasa

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。