2版

様　式　C－19、F－19－1、Z－19　（共通）

科研費 KAKENHI

# 科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　元 年　 6 月 11 日現在

機関番号：３２６５２
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2014～2018
課題番号：２６４００１２３
研究課題名（和文）D加群のアルゴリズムとその応用

研究課題名（英文）Algorithms for D-modules and their applications


研究代表者
大阿久　俊則（OAKU, Toshinori）

東京女子大学・現代教養学部・教授

研究者番号：６０１５２０３９


交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,700,000円


研究成果の概要（和文）：D加群とは線型（常または偏）微分方程式系を代数的に捉えた概念である。D加群のうちホロノミック系と呼ばれるクラスは線型常微分方程式（系）の一般化であり，解の全体が有限次元であるという性質がある。ホロノミック系を満たす関数，すなわちホロノミック関数の性質はD加群の考察から解明できると期待される。そこで，ホロノミック関数の多項式不等式で定義された領域上の積分の満たすホロノミック系を計算するアルゴリズムを構成し結果がホロノミックになることを示した。応用として統計学に現れる種々の分布の確率密度関数や，３角形図式に対応する時空2次元のファインマン積分などの満たすホロノミック系を計算した。


研究成果の学術的意義や社会的意義
D加群理論は線型微分方程式の一般化であり，数学のみならず理論物理学でも重要な理論であるが、極めて抽象的な理論であるため、実際の計算は従来は極めて困難であった。コンピュータで実行できるアルゴリズムを構成することにより応用範囲を著しく拡張することができた。たとえば統計学における種々の分布の確率密度関数が満たす微分方程式が機械的に計算できる。これによって種々の確率分布の数値計算が効率的に行えるようになることが期待される。またファインマン積分など素粒子物理学への応用も見込まれる。


研究成果の概要（英文）：D-module is an algebraic concept corresponding to a system of linear (ordinary or partial) differential equations. Holonomic systems are an important class of D-modules; their solutions constitute a finite dimensional vector space. Hence properties of a holonomic function are expected to be extracted from the corresponding holonomic system. I constructed an algorithm for computing a holonomic system for the integral of a holonomic function over the domain defined by polynomial inequalities. I also gave a rigorous proof that the result of the algorithm is in fact a holonomic system. As an application, I computed holonomic systems for density functions for various stochastic distributions, as well as for the Feynman integral associated with the triangle Feynman diagram in the two-dimensional space-time.


研究分野：代数解析学


キーワード：D加群　アルゴリズム　ホロノミック関数　超関数　積分　グレブナー基底　確率密度関数　ファインマン積分

1. 研究開始当初の背景

線形（常または偏）微分方程式系を代数的に捉えた概念である $D$ 加群理論は佐藤幹夫、柏原正樹らにより 1970 年前後に基礎が築かれた。しかし $D$ 加群理論は高度に抽象的であり，そこで定義された種々の対象や不変量を具体的に計算する方法は特別な場合を除いて知られていなかった。そこで本研究代表者は 1995 年頃から $D$ 加群についてのアルゴリズムの研究に着手し，アファイン空間上の（すなわち Weyl 代数上の）$D$ 加群について，$D$ 加群の最も基本的な不変量である特性多様体や、最も基本的な演算である制限と積分，さらに $b$ 関数（Bernstein-Sato 多項式）などの計算アルゴリズムを微分作用素環のグレブナー基底を用いて構成した。しかし，実際に具体的な（超）関数に対して $D$ 加群のアルゴリズムを適用する際には，$D$ 加群の代数的な考察だけでなく,（超）関数に対する解析的な考察が不可欠である。本研究代表者は，前研究課題を遂行中の 2011 年から 2013 年にかけて，ホロノミック関数の多項式不等式で定義された領域上の積分のみたすホロノミック系を計算するアルゴリズムを提案したが，適用できる関数の条件や，計算結果がホロノミック系になるための条件などについて考察が不十分であった。また，数学以外への応用も未開拓であった。

2. 研究の目的

$D$ 加群に対するアルゴリズムの整備と拡張を進めるとともに，適用範囲を広げることを目標として研究を行なった。特に次の 3 点を具体的な研究目標として設定した。

(1) 今までに知られている $D$ 加群のアルゴリズムの拡張や効率化を行うこと。特に局所化アルゴリズムや $b$ 関数の計算アルゴリズムなどを考察する。

(2) ホロノミック関数の多項式不等式で定義された領域上での積分の満たす $D$ 加群の計算アルゴリズムの精密化を行うこと。特に適用範囲の明確化と，計算結果がホロノミックになることを厳密に証明すること。

(3) $D$ 加群のアルゴリズムの統計学や物理学などへの応用を開拓すること。

3. 研究の方法

アルゴリズムの研究では，実際にプログラムを作成して検証する必要がある。$D$ 加群のアルゴリズムのほとんどは微分作用素環におけるグレブナー基底計算に依存している。グレブナー基底の概念とアルゴリズムは多項式環の場合に Buchberger により導入され，現在では数式処理ソフトウェアの主要な機能の 1 つとなっている。本研究では，通常の多項式におけるグレブナー基底だけでなく微分作用素環という非可換な環におけるグレブナー基底の計算を実行する必要がある。そこで微分作用素環のグレブナー基底を計算できるソフトウェアとして Risa/Asir を主に使用した。これは日本で開発されたフリーソフトウェアであり，研究者の間ではその計算能力についての評価が高い。開発者と頻繁に研究連絡を行えるというメリットも大きかった。また実際の計算には多くの時間と記憶容量を必要とするため，複数の PC を同時に稼働させるなどして効率化を図った。

一方，アルゴリズムの応用については，数学のみならず，統計学や素粒子論など $D$ 加群の応用が期待できる分野についても積極的に視野を広げるように務めた。特に 2015 年 7 月に大阪で開催されたグレブナー基底 50 周年を記念する研究集会（学会発表⑥,⑦）では $D$ 加群の統計学への応用について，2019 年 3 月にドイツのマインツ大学理論物理学研究所で開催されたワークショップ（学会発表①）では $D$ 加群のファインマン積分への応用について，それぞれ本研究課題の遂行において極めて有用な示唆を受けた。

4. 研究成果

$D$ 加群とは線型（常または偏）微分方程式系を代数的に捉えた概念である。$D$ 加群 $M$ に対して特性多様体という代数的集合が定まるが、それが最小次元のとき $M$ はホロノミック系 (holomomic system) であるという。ホロノミック系を満たす（超）関数のことをホロノミック（超）関数と呼ぶ。ホロノミック関数

の性質を調べるために，それの満たす $D$ 加群を考察することがしばしば有用である。$D$ 加群、特にホロノミック系に対するアルゴリズムの開発とその応用として次のような研究成果を得た。

(1) ホロノミック関数の積分に対するホロノミック系の計算アルゴリズムとその応用（論文⑤,⑧）

与えられたホロノミック関数 $u$ に対して，それの多項式不等式により定義された領域上の積分は，一般にまたホロノミック関数となるが，その積分の満たすホロノミック系を求めるアルゴリズム（大阿久 2013）について，さらなる理論的な考察を行うとともに，新たな応用を見出した。まず，このアルゴリズムが適用できるためのホロノミック関数に対する条件が従来の研究では明確にされていなかったため，積分が存在してこのアルゴリズムが適用できるような超関数のクラスを理論的に設定した。これは多くの確率密度関数を含むものである。

また，積分アルゴリズムでは前処理として，積分領域が多項式不等式 $f_1 \geq 0, \ldots, f_m \geq 0$ で定義される場合にヘビサイド関数 $Y(t)$ を用いて $Y(f_1)\cdots Y(f_m)u$ により定義される不連続関数が超関数として満たすホロノミック系を計算する必要がある。これはパラメータ $s_1, \ldots, s_m$ を含む（超）関数 $(f_1)_+^{s_1}\cdots(f_m)_+^{s_m}u$ の満たす $D$ 加群を，$s_1 = \cdots = s_m = 0$ に制限することにより得られる。その結果が実際にホロノミック系になることを証明した。その際，一般にはあらかじめ $u$ の満たすホロノミック系の多項式 $f_1\cdots f_m$ についての局所化（以下の (2) を参照）を計算する必要があることに注意した。

一方で，このアルゴリズムを確率密度関数の計算に応用した。正規分布やガンマ分布など統計学で重要な確率密度関数の多くはホロノミック（超）関数であることに着目して，それらの基本的な分布の多項式として表される分布の密度関数の満たすホロノミック系が，積分アルゴリズムを用いて計算できることを示した。これによって今まで知られていた公式を機械的に導出するとともに，多くの確率分布の例についてホロノミック系を具体的に計算した。これによって確率分布の数値計算が可能になると期待される。

(2) $D$ 加群の局所化アルゴリズムとその応用（論文④）

ホロノミック系の多項式 $f$ に関する局所化を計算するアルゴリズムは 2000 年に大阿久・高山・Walther により与えられた。ホロノミック系の生成元を $u$ とするとき，そのアルゴリズムでは $f^{-2}u$ が局所化加群において満たすホロノミック系が得られるが，実際の応用上は $u$ が局所化加群において満たすホロノミック系が必要になることが多い。そこで，このホロノミック系を直接計算するアルゴリズムを構成した。また，このアルゴリズムの正当性について従来よりも直接的な証明を与えた。さらに応用として，$u$ がホロノミック系の生成元である場合に，$f^s u$ に対する $b$ 関数（Bernstein-Sato 多項式）の計算アルゴリズムを導いた。これは $u$ が $f$ に関して飽和的 (saturated) という条件のもとで有効な大阿久 (1997) によるアルゴリズムを補完するものである。

(3) 多項式のべき乗とホロノミック関数の積についての留数計算アルゴリズム（論文⑥,⑦,⑨）

一般に $u$ をホロノミックな局所可積分関数，$f$ を多項式とするとき，$f_+^s u$ という $s$ をパラメータとする関数は，$s$ について超関数値の有理型関数として全複素平面に解析接続される。その極（の候補）は (2) の $f^s u$ に対する $b$ 関数から定まる。そこで，$f_+^s u$ の極におけるローラン展開の係数（超関数）を求めることは興味深い問題である。このローラン展開の係数が超関数として満たすホロノミック系を計算するアルゴリズムを導き，実際に具体例について計算を行った。また，$u = 1$ で $f$ が正規交差特異点を持つ場合に，ローラン係数の満たす（局所的な）ホロノミック系を計算実験から予想し，それが正しいことを証明した。さらにメリン変換を経由して $f_+^s u$ の積分 ($s$ の有理型関数，局所ゼータ関数とも呼ばれる）の満たす差分方程式を計算するアルゴリズムが得られる。

(4) ファインマン積分の満たすホロノミック系の計算（論文②,③）

素粒子の衝突や生成消滅などの相互作用を記述するファインマン図式に対応して，ファインマン積分と呼ばれる関数が定義される。これはファインマン図式の外線に対応する（4 次元）運動量を変数とする関数である。このファインマン積分（正確にはデルタ関数因子を除いたファインマン振幅）の満たすホロノミック

系を計算することは数学的にも素粒子論においても重要な問題である。これは原理的には (1) の積分アルゴリズムで計算可能であるが，実際の計算は極めて困難である。サンライズ図形と呼ばれる 2 頂点 3 内線の場合は対応するホロノミック系は近年物理学者によって見出されていた。そこで，次に簡単と思われる三角形図式について時空 2 次元という条件のもとで，対応するホロノミック系とその特性多様体を計算することに成功した。特にその特異点集合（ランダウ特異点）の構造を局所 $b$ 関数によるストラータを用いて解明した。

(5) 多様体に対する一般化 $b$ 関数の計算アルゴリズム（論文①）

一般に，ホロノミック系の生成元 $u$ と解析的連接層が与えられると，それに付随して一般化 $b$ 関数が定義される。これは $u=1$ の場合に Budur-Mustata-Saito によって定義された $b$ 関数の一般化である。代数的（多項式係数）の場合にこの一般化 $b$ 関数の計算アルゴリズムを与えた。特別な場合として，ホロノミック系の生成元 $u$ と代数的集合 $V$ に対して，$V$ の正則点において $u$ の $V$ に沿っての $b$ 関数（決定多項式）を計算するアルゴリズムを与えた。これは従来は $V$ が線型集合の場合にのみ知られていたアルゴリズムの適用範囲を著しく拡張するものである。

5. 主な発表論文等

[雑誌論文]（計 9 件）

① T. Oaku, On various $b$-functions of specializable $D$-modules. RIMS Kokyuroku 印刷中，査読無 http://lab.twcu.ac.jp/oaku/RIMSkokyu2019.pdf

② T. Oaku, An algorithmic study on the integration of holonomic hyperfunctions —oscillatory integrals and a phase space integral associated with a Feynman diagram. RIMS Kokyuroku Bessatsu **B75** (2019), pp. 41–60. 査読有 http://lab.twcu.ac.jp/oaku/RIMSbessatsu2017.pdf

③ T. Oaku, An attempt to compute holonomic systems for Feynman integrals in two-dimensional space-time. RIMS Kokyuroku, Kyoto Univ., Vol. 2101, pp. 77–90, 2019. 査読無 http://lab.twcu.ac.jp/oaku/RIMSkokyu2018.pdf

④ T. Oaku, Localization, local cohomology, and the $b$-function of a $D$-module with respect to a polynomial. Advanced Studies in Pure Mathematics **77** (2018), pp. 353–398. 査読有 http://lab.twcu.ac.jp/oaku/MSJSI2015oakuPaper.pdf

⑤ T. Oaku, Algorithms for $D$-modules, integration, and generalized functions with applications to statistics. Advanced Studies in Pure Mathematics **77** (2018), pp. 253–352. 査読有 http://lab.twcu.ac.jp/oaku/MSJSI2015oakuLecture.pdf.

⑥ T. Oaku, Operational calculus for holonomic distributions in the framework of $D$-module theory. RIMS Kokyuroku Bessatsu **B61** (2017), pp. 123–140. 査読有 http://arxiv.org/abs/1604.00490

⑦ T. Oaku, Annihilators of Laurent coefficients of the complex power for normal crossing singularity. RIMS Kokyuroku Bessatsu **B57** (2016), pp. 79–84. 査読有 http://arxiv.org/abs/1509.01656

⑧ N. Marumo, T. Oaku, A. Takemura, Properties of powers of functions satisfying second-order linear differential equations with applications to statistics. Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics **32-2** (2015), 553–572. 査読有 DOI:10.1007/s13160-015-0179-3

⑨ T. Oaku, Annihilators of distributions associated with algebraic local cohomology of a hypersurface. Complex Variables and Elliptic Equations, **59** (2014), 1533–1546. 査読有 DOI:10.1080/17476933.2012.751100

[学会発表] （計 8 件）

① T. Oaku, Computation of holonomic systems for Feynman amplitudes associated with some simple diagrams. The Mathematics of Linear Relations between Feynman Integrals, Mainz Institute for Theoretical Physics, March 19, 2019.

② T. Oaku, On various $b$-functions of specializable $D$-modules. RIMS 共同研究（公開型）「代数解析学の諸問題ー超局所解析及び漸近解析」，京都大学数理解析研究所，2018 年 10 月 17 日.

③ T. Oaku: An attempt to compute holonomic systems for Feynman integrals in two-dimensional spacetime. RIMS 共同研究（公開型）「超局所解析と漸近解析」，京都大学数理解析研究所，2017 年 10 月 20 日.

④ T. Oaku, An algorithmic study on the intgration of holonomic distributions. New development of microlocal analysis and singular perturbation theory, RIMS, Kyoto University, October 4, 2016.

⑤ T. Oaku, Some algorithmic problems for holonomic distributions. Microlocal Analysis and Singular Perturbation Theory, RIMS, Kyoto University, October 8, 2015.

⑥ T. Oaku, Algorithms for $D$-modules, integration, and generalized functions. The 8th Mathematical Society of Japan Seasonal Institute "Current Trends on Groebner Bases —The 50th Anniversary of Groebner Bases—", Hotel Nikko Osaka, Osaka, Japan, July 1–10, 2015.

⑦ T. Oaku, Some $D$-module theoretic aspects of the local cohomology of a polynomial ring. The 8th Mathematical Society of Japan Seasonal Institute
Current Trends on Groebner Bases —The 50th Anniversary of Groebner Bases—", Hotel Nikko Osaka, Osaka, Japan, July 1-10, 2015.

⑧ T. Oaku, Algebraic and algorithmic study of some generalized functions associated with a real polynomial (or a real analytic function). Seminar at the Department of Algebra, the University of Sevilla, Spain, September, 2014.

[図書] （計 0 件）

6. 研究組織
(1) 研究分担者 なし