様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２９ 年　 ５ 月 １６ 日現在

機関番号：１１５０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2014～2016
課題番号：２６４００１２９

研究課題名（和文）調和解析的手法による関数空間上の種々の作用素の研究

研究課題名（英文）Study of the operators on some function spaces in harmonic analysis

研究代表者
佐藤　圓治（SATO, ENJI）

山形大学・理学部・名誉教授

研究者番号：８０１０７１７７

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,300,000円

研究成果の概要（和文）：調和解析による関数空間上の作用素の研究は、偏微分方程式の研究にとっても有効である。更に、それらの作用素がどの関数空間で有界であるかは、大変重要である。本研究においては、特に、分数幕積分作用素をradial関数空間のモレー空間上での有界性の研究及び偏微分方程式の解空間として重要であるモジュレーション空間の研究を主として行った。前者においては、分担者との共同研究でこれまでの研究を一般化できた。後者については、調和解析における作用関数の研究を通して、連携研究者と共同研究を行い、これまでの研究を進展させた。

研究成果の概要（英文）：Study of the operators in function spaces by harmonic analysis is very effective for partial differentiable equations. Moreover, it is important that an operator in some function spaces is bounded. Main subjects in our research are study of Fourier multiplier operators, study of fractional integral operators in Morrey spaces, and study of modulation spaces which are related to partial differential equations. First, we gave a simple proof of the restriction theorem of Fourier multipliers, and generalized the result of the fractional integral operators in Morrey spaces. Also we developed the result in modulation spaces by the study of operating functions.

研究分野：数物系科学

キーワード：分数幕積分作用素　モレー空間　フーリエマルチプライヤー　モジュレーション空間　双線形作用素

１．研究開始当初の背景

（1）1950 年代に Calderon-Zygmund は、特異積分作用素の Lp 空間上での有界性を研究し、偏微分方程式への応用に成功した。この時に使われた関数の分解の手法である Calderon-Zygmund 分解は、その後の解析学に大きな発展をもたらした。そして、Hardy 空間や Lorentz 空間等の関数空間上の作用素の研究の発展へと繋がった。Morrey は、1930 年代に Lp 空間を一般にした関数空間を研究し、偏微分方程式の研究に導入した。これが、今日、Morrey 空間といわれているものである。この空間は関数空間としても興味があり、1960 年代に Peetre 等、1970 年代に Adams 等により研究された。その後、Chiarenza 等、イタリアの研究者達により、分数冪積分作用素の Morrey 空間上での有界性が研究され、最近、特に一般化された Morrey 空間での研究が盛んに行われるようになった。

（2）1970 年代に重み付き空間の理論が、Muckenhoupt, Wheeden 等により研究され、重み付き空間での関数空間の作用素の有界性の研究が行われるようになった。

（3）A.Calderon が提出した Lipschitz 曲線上の双線形 Hilbert 変換の有界性に関する問題は、30 年ほど未解決であったが、1997 年に Lacey-Thiele により解決した。この後、双線形を一般化した多重線形作用素の研究が盛んになった。また、Fourier 級数の部分和からなる作用素は、Fourier multiplier の立場からみると Lp 空間上の平行移動不変な有界線形作用素であり、1960 年代以降、K.de Leeuw 等により、種々の観点から多くの研究が行われた。

（4）分数冪積分作用素の研究は、1930 年代に、Hardy, Littlewood, Soblev によって行われその有界性が Hardy-Littkewood-Sobolev の定理として示された。その後、1950 年代に、Stein-Weiss により、重み付き Lp 空間に一般化された。2011 年に、De Napoli - Drelichman - Duran 達は、関数空間を原点からの距離のみに依存する関数である radial 関数に限定した関数空間において、Stein - Weiss の結果が改良されることを示した。

（5）1980 年代に Feichtinger は、Lp 空間と関連する関数空間である modulation 空間を導入した。この空間は、L2 空間の拡張とも考えられる関数空間で、偏微分方程式との関係で盛んに研究されている。modulation 空間の研究当初は、偏微分方程式へ応用する研究があまりなく、偏微分方程式との相性があまり良くないと考えられていたこともあったが、「シュレディンガー作用素は Lebesgue 空間や Besov 空間上では有界でないが、modulation 空間上では有界になる」などの結果が明らかにされ、偏微分方程式の研究者からも新たな可能性を持つ空間として注目されている。

２．研究の目的

（1）ユークリッド空間上の Lp 空間上の作用素である Fourier multiplier の制限定理の研究である。この研究は、これまで de Leeuw, Stein, Weiss, Bourgain 等の多くの研究者たちによって研究されてきている。2012 年に、Carro と Rodriguez-Lopez によりユークリッド空間の Lp 空間上の多重線形作用素である Fourier multiplier についての研究を行っているので更なる研究の進展を行う。

（２）分数冪積分作用素の研究は、Hardy-Littlewood-Sobolev の定理以来、多くの研究者たちによって種々の関数空間において、その有界性が研究されている。ここでは、Lp 空間の一般化である Morrey 空間における有界性について研究を進展させるのが目的である。

（３）Feichtinger によって導入された modulation 空間の研究の進展を古典調和解析の手法を用いて行う。modulation 空間は偏微分方程式において重要な空間であり、そ

れに関連したBihimani-Ratnakumarの研究を進展させることが目的である。

３．研究の方法

（1）本研究課題に関係する文献及び図書を研究する。

（2）研究課題に関係する研究会である調和解析セミナー等の研究会に参加し、討論参加・情報収集を行う。

(3)分担者とMorrey空間に関して共同研究を行う。更に、連携研究者とは、modulation空間について共同研究を行う。

４．研究成果

（1）Fourier級数の部分和を作用素とみるとLp空間上の有界であることは、1930年代にRiesz によって示されているが、この作用素を一般化したのがFourier multiplierである。ユークリッド空間上のFourier multiplierの整数群への制限は、1965年のK.de Leeuwによる研究から始まった。その後、多くの方向から研究があったが、2012 年に Carro, Rodriguez-Ropezにより、Fourier multiplierの制限について、研究を最初に始めた de Leeuwの考え方を最も一般化した「多重線形作用素を重み付き空間で考える概念」での研究結果が発表された。この研究により、この方向でのde Leeuwの研究の発展は、一応の達成を見た。我々は、Carro,Rodriguez-Ropezの研究とほぼ同じ時期に、2009 年のAnderson-Mohantyの論文について、研究を行い、その方法を発展させて、Carro, Rodriguez - Ropezと別方法で線形の場合に同じ結果を得、勘甚―菅野―佐藤の結果として、2013年に発表した。本研究においては、更に、この方法を精密にして、多重線形のFourier multiplier について、Carro, Rodriguez - Ropez達と同じ結果を得、数学の専門誌に発表した。

（2）Morrey空間の分数幂積分作用素について分担者と共同研究を行い、次の成果を得た。Morrey 空間の分数幂積分作用素の有界性については、Spanneの不等式、Adamsの不等式が知られている。一方、Lp 空間上の分数幂積分作用素の有界性については、Hardy-Littlewood-Sobolevの定理、重み付きLp 空間での Stein-Weiss の定理が知られている。2011年にDe Napoli – Drelichman - Duran達が、radial関数に限定した関数空間にして、Stein-Weiss の結果を改良した。分担者との共同研究により、De Napoli – Drelichman - Duran 達の結果を Central Morrey 空間に一般化することに成功した。重みのないCentral Morrey空間での類似の結果については、数学の専門誌に掲載決定している。その後の研究については、研究会で発表した。我々の研究結果からは、系としてSpanne型の不等式、Adams型の不等式が自然に導かれる。

（3）modulation空間は、偏微分方程式の解空間として重要である。2012年にBihimani - Ratnakumar達は、Razhansky – Sugimoto - Wang の問題を古典調和解析の方法を用いて解決し、論文として数学の専門誌に発表した。しかし、若干の問題が残り Bihimani - Ratnakumar達は、その論文において問題として掲載した。我々は、連携研究者との共同研究で、Bihimani-Ratnakumar達の研究を深化させ、古典的な調和解析の研究内容であった作用関数の研究手法を用いて、その問題を解決し、研究会において発表した。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　２件）

(1)E.Sato, Some remarks on the Restriction Theorems for the Maximal operators on Rd, Analysis Theory and Applications Anal. Theory Appl.31(2015),123-137.

(2)Y.Komori-Furuya, E.Sato, Fractional integral operators on central Morrey

spaces, to appear in Mathematical Inequalities and Applications.

〔学会発表〕（計　３件）

（1）<u>佐藤圓治</u>、Morrey spaces related to radial functions、調和解析セミナー
於　石川県金沢市　石川県政記念　しいのき迎賓館、3 月 3 日～3 月 5 日.

（2）<u>佐藤圓治</u>、いくつかの関数空間上の Fourier multiplier 等の作用素について、日本数学会　於　茨城県つくば市　筑波大学、2016 年 3 月 16 日～3 月 19 日.

（3）<u>佐藤圓治</u>、関数空間上の作用素について、調和解析セミナー、於　山形県山形市　ヒルズサンピア山形、2014 年 12 月 25 日～12 月 27 日。

６．研究組織

(1)研究代表者

佐藤　圓治(SATO, Enji)

山形大学・理学部・名誉教授

研究者番号：80107177

(2)研究分担者

古谷　康雄（FURUYA，Yasuo）

東海大学・理学部・教授

研究者番号： 70234903

(3)連携研究者

小林　政晴（KOBAYASHI，Masaharu）

北海道大学・理学研究院・准教授

研究者番号：30516480