様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　(共通)

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２９ 年　 ６ 月 １２ 日現在

機関番号：１３６０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2014～2016
課題番号：２６４００１３０

研究課題名（和文）非加法的測度の積算概念としての非線形積分の研究と摂動法による解析手法の開発

研究課題名（英文）Nonlinear integrals in nonadditive measure theory and their study based on a perturbative method

研究代表者
河邊　淳（KAWABE, Jun）

信州大学・学術研究院工学系・教授

研究者番号：５０１８６１３６

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,700,000円

研究成果の概要（和文）：非加法的測度の積算概念であるChoquet積分，Sugeno積分，Shilkret積分などの非線形積分は，非加法的測度全体が作る空間と可測関数全体が作る空間の直積空間上で定義された非線形な積分汎関数とみなせる．この視点から非線形積分に関する重要定理，特に，単調収束定理や有界収束定理などの積分収束定理や測度の弱収束に関するPortmanteau定理を考察し，積分汎関数に適切な摂動性（測度と被積分関数に与えた微少な変化が積分汎関数に及ぼす影響を上手に制御するための条件）を課すことにより，これらの定理は個別の積分形に依らず統一的に議論可能であることを実証した．

研究成果の概要（英文）：We may view nonlinear integrals such as the Choquet, the Sugeno and the Shilkret integrals as nonlinear integral functionals defined on the product of the space of all nonadditive measures and the space of all measurable functions. From this point of view, we discussed the monotone convergence theorem and the bounded convergence theorem for such nonlinear integrals, together with the portmanteau theorem for nonadditvie measures, and verified that they can be formulated independently of the type of the integrals by using the notion of perturbation of integral functional. This perturbation manages the small change of the functional value arising as a result of adding small amounts to a measure and an integrand.

研究分野：測度論

キーワード：非加法的測度　非線形積分　摂動法　積分収束定理　擬加法的性質　Choquet積分　Sugeno積分　Shilkret積分

１．研究開始当初の背景

非加法的測度は数学的には空集合で零となる単調増加な集合関数である．非加法的測度とその積算概念としての非線形積分の研究は，古くから断片的には行われていたが，1961 年の Ellsberg の壺の実験により，その重要性が再認識された．彼の心理実験によれば，不完全な情報下での人間行動を説明するには，非加法的測度とその非線形な積算概念である Choquet 積分や Sugeno 積分を土台とする期待効用理論の構築が必要となる．このように，非加法的測度論と非線形積分論は，工学や社会科学分野の研究者からの切実な要請に基づき，従来の測度論や確率論から“加法性”を，積分論から“線形性”の呪縛を取り払い，現実社会の問題に適切に対応可能な理論構成を目的として登場した新理論で，数学的には『測度論の非加法化，積分論の非線形化，さらには両理論の精密化』を目指す理論と考えられている．

測度論の研究者の多くは，測度に加法性を仮定しなければ実りある理論は得られないと考えていた．しかし，1976 年の Sugeno による工学的視点，Dobrakov による数学的視点からの基礎研究を出発点とし，その後の多くの数学者，工学者，社会科学者による理論・応用両面にわたる研究の結果，測度論の多くの重要定理が実用的なより弱い加法性（弱零加法性，零加法性，自己連続性，一様自己連続性，擬距離生成性など）のもとで成立することがわかってきた．それらの研究成果は早くも 1990 年代前半には，Wang & Klir (1992, 2009), Denneberg (1994), Pap (1995)らの専門書にまとめられた．

一方，非加法的測度の積算概念としての非線形積分は，期待効用理論や主観的評価問題，測度論・積分論の精密化の観点から重要であるが，測度の非加法性に起因して Lebesgue 流の積分の定義をそのまま適用しても合理的な積分とはならない．また，数学理論では 2 項演算は加法＋と乗法・が基本的であるが，工学や社会科学分野ではこれに加えて，束演算である上限と下限が広く用いられている．そこで，非加法的測度論の応用分野では，加法と乗法で定義される Choquet 積分，上限と下限で定義される Sugeno 積分，上限と乗法で定義される Shilkret 積分や，それらの変形の中から，具体的な問題ごとに適切な積分を取捨選択して積算概念として用いている．

２．研究の目的

非線形積分の理論研究は Choquet 積分に重点が置かれてきた．その理由として，Choquet 積分は加法と乗法を用いて定義されていて数学者には取り扱いやすいことや，測度が可算加法的な場合は Lebesgue 積分と一致するので，証明手法や得られる結果を予測しやすい点などが挙げられる．しかし，工学や社会科学への応用を真に考慮した場合，Sugeno 積分や Shilkret 積分の性質も詳細に研究することが喫緊の課題となっている．今回の研究の目的は，非加法的測度の積算概念として重要なこれら 3 つの積分がもつ固有の性質をより詳細に調査すると同時に，研究の方法欄で述べる摂動法を用いた議論が可能な部分を抽出・整理し，非線形積分論の統一的な理論展開の可能性を実証することにある．その際，個々の非線形積分に対して容易にチェックできる汎用的な摂動条件を見出すことが研究のポイントとなる．具体的には以下の研究を推進する．

(1)非線形積分に対する有界収束定理の成立性と測度の自己連続性との同値性
(2)非加法的測度の弱収束と同値な条件をまとめた Portmanteau 型定理の積分汎関数を用いた定式化
(3)同程度一様自己連続な非加法的測度の集合上での測度の弱収束の一様性
(4)連続関数空間や束構造をもつ抽象関数空間上で定義された共単調加法的な単調非線形汎関数の積分表示定理（Riesz 型/Daniell 型積分表示定理）の定式化
(5)測度列の弱収束に関する Alexandorff 定理の非加法化

３．研究の方法

Choquet/Sugeno/Shilkret 積分は可測空間上で定義された非加法的測度 μ と可測関数 f の汎関数 $I(\mu,f)$ とみなせる．この汎関数を積分汎関数とよぶ．また，Choquet 積分，Sugeno 積分，Shilkret 積分はどれも被積分関数 f の μ-減少分布関数 $G_f(t):=\mu(\{f>t\})$ で定まるという共通点をもつ．この視点から，Klement, Mesiar, Pap らは減少分布関数で定まる非線形積分の統一化を試み，積分汎関数の単調性，共単調加法性，正斉次性などの基本性質を確立した．しかし，積分がもつ様々な収束定理を積分汎関数 $I(\mu,f)$を用いて定式化するには，被積分汎関数 f を微少量 ε だけ，μ-減少分布関数を微少量 δ だけ変化させ，次の摂動

$$\mu(\{f>t\}) \leqq \mu(\{g+\varepsilon>t\})+\delta \quad (-\infty<t<\infty)$$

を与えたときの積分汎関数の値

$$|I(\mu,f)-I(\mu,g)|$$

の変化を上手に制御する方法論（摂動法による解析手法）の確立が必要となる．具体的には以下の手順で研究を進めた．

(1)非線形積分汎関数に対する有界収束定理の定式化

Choquet 積分に対しては有界収束定理の成立性と測度の自己連続性は同値であることは前回の研究で示されている．

①Choquet 積分は測度が可算加法的な場合は Lebesgue 積分と一致するが，Sugeno 積分は一致しないという本質的な違いがあるにも関わらず，Sugeno 積分に対しても Choquet 積分と同じ同値性が成り立つことは予備的考察により判明している．そこで Shilkret 積分についても同様な定式化が可能かを調べた．

②Choquet/Sugeno 積分の場合には，上記の同値性は被積分関数や非加法的測度を摂動させ

たときの積分値の挙動を厳密に評価する手法により証明できる．そこで，この摂動性の概念を一般の積分汎関数に対して定式化することを試みた．その際に，測度の自己連続性と摂動性の概念をどのように関連づけるかが鍵であった．

(2)Choquet 汎関数とその表現測度の擬加法的性質の相互保存性

Choquet 積分の Daniell-Stone 流の公理的特徴づけは Greco により確立されている．そこで，この Greco の公理を満たす積分汎関数である Choquet 汎関数の表現測度が非加法的測度論の展開に不可欠な擬加法的性質（弱漸近零加法性，漸近零加法性，上からの自己連続性，上からの一様自己連続性，擬距離生成性，弱零加法性，零加法性，劣モジュラー性，優モジュラー性）をもつために汎関数に課すべき条件を考察した．

(3)非線形積分で定まる非加法的測度の弱収束に対する Portmanteau 型定理の定式化

非加法的測度に対して“連続集合”の概念を合理的に定義すれば，距離空間上の非加法的測度の有向列の Lévy 収束性は有界連続関数の Choquet 積分の有向列の収束性（測度の弱収束性)と同値であり,Portmanteau 定理(邦訳：寄せ集めの定理）の非加法的一般化になっている．測度の有向列の Lévy 収束の概念は積分とは無関係に定義可能なので，それが Choquet 積分の有向列の収束と同値ならば,その他の非線形積分の収束とも同値となることが予想される．

①Sugeno 積分や Shilkret 積分などの他の非線形積分に対して非加法的 Portmanteau 定理を定式化することを試みた．

②積分汎関数の摂動性と関連づけた証明手法を新たに考案し，一般の積分汎関数に対する Portmanteau 定理をどのように定式化したらよいかを考察した．

(4)同程度一様自己連続な非加法的測度の集合上での測度の弱収束の一様性

距離空間上で定義された同程度一様自己連続な非加法的測度の集合またはその双対測度の集合，例えば，劣モジュラーまたは優モジュラーな測度の集合上では,Choquet 積分が定める測度の弱収束は一様構造をもち，Lévy-Prokhorov 型及び Fortet-Mourier 型距離により距離付け可能となる．しかし，Choquet 積分の場合に測度の弱収束が一様であったとしても，他の非線形積分の場合にも同様の一様構造をもつかどうかは不明である．

①Sugeno 積分や Shilkret 積分が定める測度の弱収束も一様構造をもち，それらの積分から定義される Fortet-Mourier 型距離により距離付け可能となるかを議論した．

②一般の積分汎関数の場合でも，測度の弱収束性は一様構造をもち，積分汎関数が定める Fortet-Mourier 型距離により距離付け可能となるかを考察した．

(5)非線形積分の単調収束定理への統一的アプローチ

Lebesgue 積分の収束定理として重要な優収束定理や Fatou の補題は，単調収束定理から導かれる．しかし，Choquet/Sugeno/Shilkret 積分などの非線形積分に対しては，測度の非加法性，積分の非線形性に起因して，単調収束定理は積分の種類に応じてそれぞれ異なる形式で定式化されている．これらを積分汎関数の枠組みで統一的に取り扱う手法を開発することを試みた．

①積分の非線形性により，Lebesgue 積分の場合とは異なり，単調減少収束定理は単調増加収束定理からの自明な帰結とはなりえない．そこで両者の収束定理を別個に議論した．

②統一的議論を行うために，単調収束定理が一般の積分汎関数の枠組みで定式化可能か否かを検討するとともに，定理が成立するために積分汎関数に課すべき条件を探究した．

(6)位相空間上の非線形積分の単調収束定理

Lebesgue 積分では，基礎空間（測度や被積分関数が定義されている空間）が位相空間の場合は，上半連続（下半連続）な単調増加（単調減少）関数からなる一様有界な有向列に対して単調収束定理が成り立つ．

①Choquet/Sugeno/Shilkret 積分に対しても Lebesgue 積分の場合と同様な単調収束定理が成立するかを検討した．

②位相空間上の単調収束定理に対しても摂動性の概念を用いた統一的取り扱いが可能かどうかを考察した．

(7)非加法的測度論の普及活動

非加法的測度と非線形積分の理論研究は非常な勢いで発展してきたが，その反面，研究者ごとに異なる用語や設定のもとで議論されることが多く，理論を応用する立場の研究者を困惑させる状況になっている．そこで，関連する国内外の論文を広く収集し，理論構築に不可欠な重要概念や定理を，統一した用語や設定のもとで整理した論説記事の執筆を検討した．

４．研究成果

得られた研究成果は以下の通りである．

(1)非線形積分汎関数に対する有界収束定理の定式化

非加法的測度の積算概念である Choquet 積分，Sugeno 積分，Shilkret 積分は，理論的取り扱いが比較的容易で応用範囲も広い．これら積分概念を実用化し，他分野への応用を目指すには，非線形積分に対する積分収束定理の確立が必須である．本研究では，上記 3 種の非線形積分が共通してもつ摂動性（測度と被積分関数に与えた微少な変化が積分汎関数の値の変化に及ぼす影響を線形的に捉えるための条件）の概念を新たに導入し，Murofushi らが定式化した Choquet 積分の有界収束定理を一般の非線形積分汎関数に拡張することを試みた．結果として，摂動条件を満たす非線形積分汎関数に対する有界収束定理の成立性は，積分汎関数を定める非加法的測度の自己連続性と同値となることを示した．応用とし

て，Lebesgue 積分や有限加法的な測度に対する D-積分や S-積分，さらには Choquet 積分，Sugeno 積分，Shilkret 積分などの非線形積分をすべて含む汎用的な有界収束定理を確立した.

(2)Choquet 汎関数とその表現測度の擬加法的性質の相互保存性

Greco 定理により，Choquet 汎関数とその表現測度は 1 対 1 に対応する．本研究では，非加法的測度論の展開に欠かせない擬加法的性質である弱漸近零加法性，漸近零加法性，上からの自己連続性，上からの一様自己連続性，擬距離生成性，弱零加法性，零加法性，劣モジュラー性，優モジュラー性を表現測度がもつために Choquet 汎関数に課す必要十分条件を見出した．証明では，Kindler が線形汎関数に対する Daniell-Stone 型表現定理の別証明に用いた劣グラフによる測度の構成手法が有効に機能した．この研究により，Choquet 汎関数とその表現測度の擬加法的性質の相互保存性が明確になった.

(3)非線形積分が定める非加法的測度の弱収束に対する Portmanteau 型定理の定式化

中心極限定理や大偏差原理などの確率論や数理統計学における極限定理の定式化や証明に利用される測度の弱収束性，すなわち，それら測度による抽象 Lebesgue 積分が有界連続関数空間上に定める積分汎関数の各点収束性は，連続集合上での測度の各点収束概念である Lévy 収束性と同値である．この結果を関連するその他の同値条件と一緒にまとめて定式化した定理が，位相空間上の測度論で広く知られる Portmanteau 定理である．この研究では，連続集合を強正則集合に，抽象 Lebesgue 積分を初等性と摂動性をもつ非線形積分汎関数に置き換えることにより，Portmanteau 定理を非加法的測度論の枠組みで定式化した．重要な応用として，初等的かつ摂動的な非線形積分である Choquet 積分，Sugeno 積分，Shilkret 積分が定める測度の弱収束はすべて Lévy 収束と一致することがわかった.

(4)同程度一様自己連続な非加法的測度の集合上での測度の弱収束の一様性

測度の弱収束が定める位相構造の研究では，その距離付け可能性問題が一つの重要なトピックである．この研究では，距離空間上で定義された同程度一様自己連続な非加法的測度全体からなる集合上では，生成的かつ摂動的な非線形積分汎関数が定める測度の弱収束は Lipschitz 関数からなる有界集合上で一様であることを示し，Fortet-Mourier 型の距離で測度の弱位相が距離付け可能となることを示した.

(5)非線形積分の単調収束定理への統一的アプローチ

Choquet 積分，Sugeno 積分，Shilkret 積分などの分布型積分(被積分関数の減少分布関数で定まる積分)を非加法的測度の集合と可測関数の集合の直積空間上の非線形積分汎関数ととらえて単調収束定理を定式化し，個別の積分によらない統一的なアプローチの方法論を確立した．特に，単調増加収束定理の場合は積分汎関数の初等性と正則性が，単調減少収束定理の場合は摂動性と可測関数列の切断性が定理の成立には不可欠であることを見出した.

(6)位相空間上の非線形積分の単調収束定理

Choquet 積分や Sugeno 積分などの非線形積分の収束定理の具体的な応用領域では，測度や被積分関数が定義されている空間は実数空間などの位相空間であることが多い．この研究では，位相空間上で定義された下半連続(上半連続)関数からなる一様有界な単調増加(単調減少) 有向列に対する積分汎関数の単調収束定理を考察し，単調収束定理が成立するための必要十分条件は，積分汎関数を定める非加法的測度の完全 o-連続性（完全 c-連続性）であることを示した.

(7)非加法的測度論に関する論説記事の執筆

非加法的測度や非線形積分の研究は 1970 年代から急速な勢いで発展し，日本でもその応用に関する数多くの研究成果がある．しかし，理論自体の研究は欧州や米国，中国では非常に盛んであるが，残念ながら日本ではまだあまり普及していない．しかも，それらは研究者ごとに異なる用語や設定のもとで議論され，数多くの論文に分散して掲載されていることもあり，理論の構築に不可欠な重要概念や定理を，統一した用語や設定のもとで整理することは，今後の研究の発展のためにも重要である．そこで，非加法的測度と非線形積分の理論研究の指針，基本的用語や重要定理，さらには将来展望を，144 編の論文を引用して丁寧に解説した論説記事を雑誌『数学』（岩波書店発行）で公表した.

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕(計 9 件)

① Jun Kawabe, A unified approach to the monotone convergence theorem for nonlinear integrals, Fuzzy Sets and Systems, 304, 2016, 1-19, 査読有
DOI:10.1016/j.fss.2016.06.013

② Jun Kawabe, The monotone convergence theorems for nonlinear integrals on a topological space, Linear and Nonlinear Analysis, 2, 2016, 281-300, 査読有
http://www.ybook.co.jp/online-p/LNA/Open/1/lnav2n2p281-oa/FLASH/index.html

③ 河邊　淳, 非加法的測度と非線形積分, 数学, 68, 2016, 266-292, 査読有

④ 河邊　淳, 分布型非線形積分の単調収束定理の統一化, 第 21 回曖昧な気持ちに挑

むワークショップ講演論文集, 2016, 23-28, 査読有

⑤ Jun Kawabe, Weak convergence of nonadditive measures based on nonlinear integral functionals, Fuzzy Sets and Systems, 289, 2016, 1-15, 査読有
DOI:1016/j.fss.2015.02.011

⑥ Jun Kawabe, The structural characteristics of Choquet functionals, Journal of Nonlinear and Convex Analysis, 16, 2015, 2181-2192, 査読有
http://www.ybook.co.jp/online-p/JNCA/Open/16/jncav16n11p2181-oa/FLASH/index.html

⑦ 河邊 淳, Choquet 積分による非加法的 Portmanteau 定理の定式化, 第 20 回曖昧な気持ちに挑むワークショップ講演論文集, 2015, 55-57, 査読有

⑧ Jun Kawabe, The bounded convergence in measure theorem for nonlinear integral functionals, Fuzzy Sets and Systems, 271, 2015, 31-42, 査読有
DOI:10.1016/j.fss.2014,06.005

⑨ 河邊 淳, Choquet 汎関数とその表現測度における擬加法的性質の遺伝性, 2014, 13-18, 査読有

〔学会発表〕(計 23 件)

① 河邊 淳, Choquet 積分の Vitali 型収束定理, 京都大学数理解析研究所研究集会「関数空間の構造とその周辺」, 京都大学数理解析研究所, 2017.2.8, 京都

② 鈴木隆史, 河邊 淳, 非線形積分に対する有界収束定理の定式化, 第 5 回信州関数解析シンポジウム, 信州大学理学部, 2016.12.20, 長野

③ 河邊 淳, 分布型非線形積分の単調収束定理の統一化, 第 21 回曖昧な気持ちに挑むワークショップ, コンパルホール, 2016.12.2, 大分

④ 河邊 淳, 非線形積分収束定理への摂動法による統一的アプローチ, 実解析学シンポジウム 2016, 奈良女子大学理学部, 2016.10.23, 奈良

⑤ 河邊 淳, 非線形積分の単調収束定理, 日本数学会 2016 秋季総合分科会, 実函数論分科会, 関西大学千里山キャンパス, 2016.9.17, 大阪

⑥ Jun Kawabe, An approach to limit theorems for nonlinear integrals by perturbative method, The Asian Mathematical Conference 2016 (AMC 2016), Bali Nusa Dua Convention Center, 2016.7.28, Bali, Indonesia

⑦ Jun Kawabe, A perturbative approach to convergence theorems for nonlinear integrals, International Symposium on Aggregation and Structures (ISAS 2016), Hotel Parc Belle-Vue, 2016.7.5, Luxembourg city, Luxembourg

⑧ Jun Kawabe, A unified approach to limit theorems in nonlinear integration theory, Summer Symposium in Real Analysis XL, International University of Sarajevo, 2016.6.25, Sarajevo, Bosnia and Herzegovina

⑨ Jun Kawabe, A unified approach to limit theorems for nonlinear integrals, The Thirteenth International Conference on Fuzzy Set Theory and Applications (FSTA 2016), Hotel SOREA Maj, 2016.1.27, Liptovsky Jan, Slovak Republic

⑩ 河邊 淳, 摂動法による線形・非線形積分の極限定理への統一的アプローチ, 第 24 回信州数学セミナー, 信州大学理学部, 2015.12.6, 長野

⑪ 河邊 淳, 非加法的測度論への招待, 第 4 回信州関数解析シンポジウム, 信州大学理学部, 2015.12.4, 長野

⑫ 河邊 淳, Choquet 積分による非加法的 Portmanteau 定理の定式化, 第 20 回曖昧な気持ちに挑むワークショップ, 明治大学中野キャンパス, 2015.11.14, 東京

⑬ 河邊 淳, Portmanteau 定理の非加法化, 実解析学シンポジウム 2015, 東邦大学習志野キャンパス, 2015.10.25, 千葉

⑭ 河邊 淳, 非加法的 Portmanteau 定理, 日本数学会 2015 年秋季総合分科会, 実函数論分科会, 京都産業大学, 2015.9.15, 京都

⑮ Jun Kawabe, Bounded convergence theorems for nonlinear integrals, The Fifth International Symposium on Banach and Function Spaces 2015 (ISBFS 2015), Kyushu Institute of Technology, Tobata Campus, 2015.9.5, Fukuoka

⑯ Jun Kawabe, The weak topology of nonadditive measures based on nonlinear integral functionals, Summer Symposium in Real Analysis XXXIX, St. Olaf College, 2015.6.9, Northfield, USA

⑰ 河邊 淳, 非加法的測度論における非線形積分汎関数の収束定理, 関数解析学の研究とその応用, 新潟大学駅南キャンパス「ときめいと」, 2015.1.30, 新潟

⑱ 松本和也, 河邊 淳, Sugeno 積分の有界収束定理, 第 3 回信州関数解析シンポジウム, 信州大学理学部, 2014.12.2, 長野

⑲ Jun Kawabe, Some convergence theorems of nonlinear integral functionals, International Conference on Recent Advances in Pure and Applied Mathematics, Club Hotel Sera, 2014.11.8, Antalya, Turkey

⑳ 河邊 淳, 非線形汎関数に対する有界収束定理, 実解析学シンポジウム 2014 富山, 富山大学, 2014.11.1, 富山

㉑ 河邊　淳，Choquet 汎関数とその表現測度における擬加法的性質の遺伝性，第 19 回曖昧な気持ちに挑むワークショップ，ホテル中原別荘，2014.10.3，鹿児島
㉒ 河邊　淳，分布関数で定まる非線形積分汎関数の有界収束定理，日本数学会 2014 秋季総合分科会，実函数論分科会，広島大学東広島キャンパス，2014.9.27，広島
㉓ Jun Kawabe, Bounded convergence theorems for nonlinear integral functionals, Summer Symposium in Real Analysis XXXVIII, Czech Technical University, 2014.7.9, Prague, Czech Republic

〔その他〕
ホームページ等
http://soar-rd.shinshu-u.ac.jp/profile/ja.jaAaZVkh.html

６．研究組織
(1)研究代表者
河邊　淳　(KAWABE, Jun)
信州大学・学術研究院工学系・教授
研究者番号：５０１８６１３６