

令和元年8月30日現在

機関番号：14301

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2014～2018

課題番号：26400132

研究課題名(和文) ランダムシュレディンガー作用素に関する問題の確率論的研究

研究課題名(英文) Probabilistic study on problems related with random Schroedinger operators

研究代表者

上木 直昌 (Ueki, Naomasa)

京都大学・人間・環境学研究科・教授

研究者番号：80211069

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,500,000円

研究成果の概要(和文)：全くランダムな点配置として知られるポアソン型点配置の周りにポテンシャルを配したシュレディンガー作用素の状態密度関数の最低エネルギーからの立ち上がり方に関するリフシッツテルの結果を点間に干渉をもつ一定のランダム点配置に対して一般化した。特に関心が高いGinibre点配置などの場合にポアソン型点配置の場合と立ち上がり方のオーダーが異なることを示した。またアンダーソン局在の数学的証明をガウス型確率場を磁場としてもつシュレディンガー作用素に拡張した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

リフシッツテルの問題の動機は不純物を含んだ半導体のエネルギー分布を明らかにすることにあるが、従来は不純物の配置のモデルとしてポアソン型点配置をとってきた。しかし本来は各ランダム点配置間に干渉を導入するべきであり、本研究はその方向に一定の成果をもたらした。特にポアソン型点配置の場合との違いがあることを示したことは意義深い。アンダーソン局在は従来スカラーポテンシャルの山の高さがランダムな場合に示されてきたが磁場の曲げる作用がランダムな場合にも局在が起きるかどうかは直感的に明らかでなく、理論的に示したことは意義深い。

研究成果の概要(英文)：As for the Lifshitz tail on the asymptotic behavior of the integrated density of states for the Schroedinger operator with single site potentials around all sample points of the Poisson point processes, the results are extended to a class of the random point processes with interactions between the sample points. For a remarkable subclass of the random point processes including the Ginibre point processes, the orders of the asymptotics are shown to be different with the case of the Poisson process.

On the other hand, the mathematical proof of the Anderson localization is extended to the Schroedinger operator with the Gaussian random magnetic fields.

研究分野：確率解析

キーワード：確率解析 微分方程式 作用素論 数理物理 ランダムシュレディンガー作用素 スペクトル リフシッツテル ランダム点配置

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

ランダムシュレディンガー作用素に関わる研究は様々な分野との関連で関心がもたれ、多くの進展が望まれる問題がある。しかしそれぞれの問題が難解なため、長年の多くの研究者の努力にもかかわらず、まだあまり理解が進んでいない。例えばこの方面の大きな課題としてはアンダーソン遷移を数学的に厳密に説明することがあるが、出来ていることは基本的なモデルでアンダーソン局在を証明することだけであり、非局在現象に至っては殆ど分かっていない。

本研究で成果が上がった状態密度関数の挙動の評価に関して、よく研究が進んでいる課題はスペクトル下端における立ち上がり方であるが、大偏差原理の応用との関連で最も注目されていたケースはポアソン点配置の周りにポテンシャルを配したケースである。このケースについては Donsker-Varqadhan、Pastur、中尾、大倉による一連の研究により、ポテンシャルの強さによる基本的な挙動が決定されていた。他の点配置では、以前、本研究代表者が福島竜輝と共同でポアソン点配置と格子点配置の間をつなぐ点配置において、ポアソン点配置のケースとほぼ同程度の結果を得ていた。他方、ポアソン点配置は全く干渉が無い無数のブラウン運動の定常分布であるが、そのブラウン運動間に干渉を加えた場合には、Sznitman によって各ポテンシャルがコンパクトな台をもつ場合のみ、干渉が十分弱い場合に状態密度関数の立ち上がり方がポアソン点配置の場合と同じであることが示されていた。他に状態密度関数の立ち上がり方が研究されていた場合は合金型モデルと言われるものであり、各ポテンシャルの位置は動かないが、各ポテンシャルに掛けられる高さに関わる係数がランダムな場合である。この場合はランダム点配置の場合と違って、結果が低エネルギーにおけるアンダーソン局在の存在の証明にまで応用されていることに特徴がある。関連してポテンシャルがガウス型確率場になっている場合があり、これについても早くから基本的な結果が得られ、低エネルギーにおけるアンダーソン局在の存在の証明にまで応用されている。更にポアソン点配置の周りにランダムな高さの係数を掛けたポテンシャルを配した、一般合金型モデルというものも考えられていて、低エネルギーにおけるアンダーソン局在の存在の証明までされている。

本研究で扱ったサインカーネルに対する行列式点過程や Ginibre 点配置は最近ランダム行列の固有値分布に現れる点配置として関連する研究が盛んになされている。またこの様な点過程を定常分布としてもつ無限個のブラウン粒子に関する研究も盛んになされている。

アンダーソン局在の証明に関して本研究で成果が上がったのはガウス型確率場となっている磁場をもつ 2 次元シュレディンガー作用素の場合であるが、これに関して分かっていたことは Erdős-Haler による特殊な磁場をもつ 2 次元シュレディンガー作用素の場合と本研究代表者による、ある具体的な関数を共分散関数とする定常ガウス型確率場を磁場にもつ 2 次元シュレディンガー作用素の場合である。この研究の鍵は Wegner 型評価を導出することであり、これがアンダーソン局在を示せる程度にまで導出出来たのであるが、元々の Wegner の動機であった状態密度関数の滑らかさの評価を示すまでには、磁場がランダムな場合には至っていない。但し磁場のベクトルポテンシャルのランダムな部分が小さい場合には Hislop-Klopp や本研究代表者により状態密度関数がヘルダー連続であることまで示している。

2. 研究の目的

ランダムシュレディンガー作用素に関わる研究に少しでも進展をもたらすこと。

3. 研究の方法

多角的に問題を考え、進展が期待出来そうな部分から取り組む。例えばこの方面の研究で比較的進展している課題は

- (1) 基本的なモデルにおけるアンダーソン局在の証明
- (2) (1)の為の状態密度関数の挙動の評価
- (3) (1)の為の Wegner 型評価

である。(1)に関してよく分かっている場合は合金型モデルと呼ばれる各格子点にランダムな高さのスカラーポテンシャルがあるシュレディンガー作用素であり、更に高さに対応する確率変数が確率密度関数を持つ場合である。最近 Bourgain のグループにより高さが離散確率変数の場合への拡張がなされたが、非常に複雑な議論であり、簡略化が望まれる。また Klein のグループによりポアソン型点配置の周りにポテンシャルを配したシュレディンガー作用素に対して、合金型モデルとの類似性を示すことによりアンダーソン局在の証明もなされたが、その他のランダム点配置に対する拡張は残されている。またそのモデルに対しては(2)(3)の問題も残されている。一方、本研究代表者は最近この様な研究に取り組んでいる研究者の中では特に確率解析の手法に詳しいことが特徴であるのでその特徴が生かせそうな問題に重点を置く。その様な問題として例えばガウス型確率場を磁場として持つシュレディンガー作用素に対する問題がある。

4. 研究成果

ランダム点配置の周りにポテンシャルを配したシュレディンガー作用素の累積状態密度関数のスペクトル下端における立ち上がり方について、一定のクラスのランダム点配置まで、明らかに出来た。特に基本的な Poisson 点配置と Ginibre 点配置ではこの立ち上がり方にオーダーの違いがあることを示せた。このことは最近長田によって示されている Ginibre 点配置の剛性と

呼ばれる動きにくさに関係する。点配置のモチベーションは不純物の位置なので、上の点配置の拡張は不純物間の干渉まで考慮する試みとして意義がある。しかし Ginibre 点配置の場合などではまだポテンシャルがコンパクトな台を持つ場合しか解決しておらず、更なる発展が期待される。またこの結果をこのモデルに対するアンダーソン局在の証明につなげることも残された課題である。同様の結果はサインカーネルに対する行列式点過程に対しても示せた。この場合は配位空間の次元が 1 なので配位空間の次元が 2 である Ginibre 点配置の場合よりはるかに問題が簡単になり累積状態密度関数の立ち上がり方の主要項を決定出来た。それに対して Ginibre 点配置の場合には主要項のオーダーまでしか決定出来ておらず、更なる発展が期待される。更に以上の結果に重要なランダム点配置の性質はホールプロバビリティと呼ばれる与えられた半径の球内にランダム点が存在しない確率の評価であり、この評価が累積状態密度関数の立ち上がり方の主要項を配位空間が 1 次元の場合には決定し、配位空間が 2 次元の場合にはそのオーダーを決定することを示せた。

アンダーソン局在の数学的証明をガウス型確率場が磁場となっているシュレディンガー作用素に対して拡張する試みについては可能な確率場のクラスをある程度拡張出来た。従来アンダーソン局在が数学的に示されていたシュレディンガー作用素ではスカラーポテンシャルがランダムなものになっているのに対して、この研究では磁場がランダムな場合を考えていることに特徴があるのだが、その様な場合にはアンダーソン局在が起きることがスカラーポテンシャルがランダムな場合ほど直感的に捉えられない、その様な場合にもアンダーソン局在が起きることを理論的に示したということでこの研究は意義深い。しかし更に可能な確率場のクラスが広げられるか 3 次元以上の場合、スピンがある場合、など進展が望まれる課題は多い。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計 2 件)

Naomasa Ueki: Asymptotic behavior of the integrated density of states for random point fields associated with certain Fredholm determinants, *Kyushu Journal of Mathematics*, 査読有, **73**(1), (2019) 43–67 doi:10.2206/kyushujm.73.43

Naomasa Ueki: Wegner estimates, Lifshitz tails and Anderson localization for Gaussian random magnetic fields, *Journal of Mathematical Physics*, 査読有, **57**(7), (2016) 071502 doi:10.1063/1.4959219

<https://repository.kulib.kyoto-u.ac.jp/dspace/bitstream/2433/232506/1/1.4959219.pdf>

〔学会発表〕(計 4 件)

上木 直昌: Asymptotic behavior of the integrated density of states for random point fields associated with certain Fredholm determinants, *スペクトル散乱理論とその周辺*, 2018

上木 直昌: Asymptotic behavior of the integrated density of states for random point fields associated with certain Fredholm determinants, *スペクトルセミナー*, 2018

Naomasa Ueki: Anderson localization in Gaussian random magnetic fields, XVIII International Congress on Mathematical Physics, 2015

上木 直昌: Anderson localization in Gaussian random magnetic fields, *ランダム作用素のスペクトルと関連する話題*, 2015

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況 (計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年：
国内外の別：

取得状況 (計 0 件)

名称：

発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究分担者

研究分担者氏名：
ローマ字氏名：
所属研究機関名：
部局名：
職名：
研究者番号（8桁）：

(2) 研究協力者

研究協力者氏名：上野 靖史(元京都大学大学院人間・環境学研究科修士課程大学院生)
ローマ字氏名：Ueno Yasushi

研究協力者氏名：船橋 巧(元京都大学大学院人間・環境学研究科修士課程大学院生)
ローマ字氏名：Funahashi Takumi

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。