

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 5 月 15 日現在

機関番号：32601

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2014～2016

課題番号：26400144

研究課題名(和文) 確率解析とその微分作用素の解析への応用

研究課題名(英文) Stochastic Analysis and its applications to partial differential operators

研究代表者

松本 裕行 (Matsumoto, Hiroyuki)

青山学院大学・理工学部・教授

研究者番号：00190538

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円

研究成果の概要(和文)：ベッセル過程に引き続き、定数ドリフトをもつブラウン運動の球面への到達時刻の確率分布について研究した。ブラウン運動の歪積表現と球面上のブラウン運動に対するストロックの確率微分方程式の解による表現を用いて、到達時刻の分布関数の具体型を与えた。応用として、尾確率の漸近挙動と対応する管状近傍の体積の期待値の漸近挙動を与えた。ベッセル過程に関しては、尾確率の漸近挙動の第2項を与えた。

その他の成果として、確率解析の理論と応用に関する著書を執筆し出版した。また、コルモゴロフ拡散過程の古典力学的な見方による研究、2次元拡散過程の特徴に関する研究を行った。

研究成果の概要(英文)：Following the former studies on Bessel processes in mind, I carried out studies on the probability distributions of the first hitting times to spheres of Brownian motions with constant drifts. By virtue of the skew-product representation of the Brownian motions and Stroock's representation of the Brownian motions on the spheres as the solutions of some stochastic differential equations, explicit forms of the distribution functions. As applications, we derived the asymptotic behavior of the tail probabilities and the volume of the corresponding Wiener sausage. Moreover, for the Bessel processes, the second term of the asymptotics of the tail probability has been reduced.

As other results, a book on the theory and applications of stochastic analysis was published. I studied Kolmogorov's diffusion process from the point of view of classical mechanics and, also investigate some important character of two-dimensional diffusion processes.

研究分野：確率解析

キーワード：確率解析 拡散過程 ベッセル過程 到達時刻 ドリフト付きブラウン運動 管状近傍

1. 研究開始当初の背景

ブラウン運動の管状近傍の体積の期待値の時間パラメータを大きくしたときの漸近挙動に関して、奇数次元のブラウン運動に対する研究を連携研究者の濱名裕治氏(熊本大)が発表した。その研究の途中から本研究の代表者の松本は関わり、詳細な議論を重ねていた。偶数次元の場合に研究が困難で、共同研究を行うことになっていた。

そのためには、ベッセル過程の到達時刻の確率分布の漸近挙動を知ることが重要な鍵になるが、それまでの研究結果では不十分であった。

ベッセル過程の到達時刻の確率分布については、ラプラス変換は Kent の研究などにより拡散過程の一般論により知られていた。また、そこに現れる変形ベッセル関数の商で与えられる関数が完全単調関数であることが Ismail によって解析学の観点から証明されており、ラプラス逆変換も試みられていた。

一方、ベッセル過程と幾何ブラウン運動や双曲空間上のブラウン運動との深い関係から、到達時刻の確率分布に関する研究がポーランドの数学者によって行われていたが結果は不十分であったため、ブラウン運動の管状近傍の研究には利用できる形の具体的な表現が必要であった。

松本が研究を進めてきた双曲空間の一般化として正定値行列の全体のなすリーマン対称空間を考察し、その上の確率解析を展開することが第2の研究目的である。これに関してはマリアバン、テラー、ロジャースなどによる半単純リー群の場合の研究が知られていたが、本研究の目的である正定値行列の空間の場合は明示的に書かれてはいない状況であった。

長年の共同研究者である谷口説男氏(九州大)との共著により「確率解析」(培風館)を出版し、研究成果の一部を公表したばかりであった。

2. 研究の目的

ベッセル過程の到達時刻の確率分布を、出発点が到達点よりも原点から離れていて、自然境界である無限遠を考慮しなければならない困難な場合に考察し、応用としてブラウン運動の管状近傍の体積の期待値の研究に应用すること。

確率解析の理論を広い範囲の問題に应用すること。一例として、正定値行列全体のなすリーマン対称空間上の確率解析を具体的に構築し、セルバーグ跡公式などに应用すること。また、半単純リー群の場合の議論が、どの程度通用するかを明らかにし、必要に応じた理論の拡張を行うこと。

双曲平面上の面積有限のリーマン面を考察するなど、コンパクトではない多様体上のラプラシアンの特値の考察に確率解析を应用すること。

2次元拡散過程の多くが、1次元拡散過程

と同様に、2次元標準ブラウン運動の時間変更を用いて表現されることを示すこと。このような表現を持つ拡散過程のクラスを決定すること。

3. 研究の方法

ベッセル過程の到達時刻に関しては、連携研究者であり共同研究を数年にわたって行ってきた濱名裕治氏と続けた。具体的には、日常的なメールなどによる研究連絡と定期的な相互訪問や研究集会、学会等で顔を合わせたときに議論を行うことによって研究を進めた。

種々の確率解析、とくに研究目的の一つであるリーマン対称空間上の確率解析に関する研究は代表者単独の研究であるが、共同研究者の谷口氏からは日常的な電子メールのやりとりと相互訪問、学会などでの議論により助言を得ながら行った。

2次元拡散過程に関する研究については、池田信行氏との共同研究であるが、一方でディクリレ形式に関する事項に関して竹田雅好氏(東北大)の助言を得ながら研究を進めた。

コンパクトでない多様体上のラプラシアンに関しては、松本が単独で、1次元拡散過程に対する伊藤-マッキーンの理論、アルフォールスなどによる擬等角写像の存在に関する定理とその証明を参考にして研究を行った。

4. 研究成果

ベッセル過程の到達時刻の確率分布に関しては、ラプラス変換が変形ベッセル関数の商で与えられることから、変形ベッセル関数の(複素)零点を用いて留数計算を具体的に実行することによりラプラス逆変換を行い、その確率分布の分布関数と確率密度の具体的な形を与えることに成功した。さらに、それらの時間パラメータを無限大にしたときの漸近挙動を与え、ブラウン運動の管状近傍の体積の期待値の漸近挙動の研究に応用した。そして、管状近傍の体積の漸近挙動が、次元が偶数の場合と奇数の場合に大きく異なる点を発見した。

到達時刻の確率分布は、一般に無限分解可能になる。ベッセル過程の場合について、そのレヴィ測度の具体的な形を与えた。到達時刻の分布もレヴィ測度も変形ベッセル関数の零点を用いて与えるが、逆に変形ベッセル関数の知られた性質を用いて、その零点のみたす代数方程式を2種類与えた。数値計算の結果は、当然ながら、一致している。さらに、過去にロシアの研究者が与えられた特別な場合の数値計算とも一致しており、様々な分野で有用ではないかと期待している。

標準ブラウン運動の場合と同じく管状近傍の体積の問題を、定数ドリフトを持つブラウン運動に対して研究した。空間的な一様性がないために、全く異なる議論をする必要が

あることをまず確認した．球面上のブラウン運動のストルックの確率微分方程式の解を用いて表現することなど，確率解析において知られていることを幾つか組み合わせて用い，ベッセル関数とは異なる特殊関数を用いて解の表示ができる偏微分方程式を解くことに議論を帰着させて，球面への到達時刻の分布関数を与え，その尾確率と管状近傍の体積に関する漸近挙動を示した．

ベッセル過程の到達時刻の分布関数は，変形ベッセル関数の零点を用いた無限級数の形であるが，具体的な表示になっている．針谷祐氏(東北大)の研究に示唆されて，尾確率の漸近挙動の第2項を求める問題に着手し結果を得た．尾確率は，原理的には漸近展開まで可能であるが，和の形になっているため第2項に関する評価を得ることが鍵であり，針谷氏の結果からこれが得られるので精密な評価を与えることに成功した．

共著「確率解析」に，確率解析の数値ファイナンスへの応用に関して，とくにグリークと呼ばれる量の解析に関して整理した章とラフパス理論とマリアバン解析の関連する事項について述べた節を内容的に加えて，「Stochastic Analysis」(ケンブリッジ大学出版局)を出版した．

確率解析の研究の一つとして，準楕円型作用素の代表例であるコルモゴロフの作用素に対応する拡散過程に対して，池田信行氏(大阪大学名誉教授)と共同で古典力学の立場からの考察を進め，結果を発表した．

正定値行列の空間上の確率解析に関しては，ほかの研究に時間をとられて予定通りには進んでいないが，岩沢分解をしたときの各成分に関して新たな知見が得られている．

ラブラシアンを考察するために，2次元曲面，リーマン面の幾何学に関する古典的な結果を見直した．その過程において，2次元拡散過程の中の大きなクラスのもつ重要な性質を発見した．現在鋭意研究中であり，近日中に論文および研究集会などで発表する予定である．

ラブラシアンのスペクトルに関しては，文献の収集は行ったが，実際に確率解析を用いた議論までには至っていない．

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計5件)

1. Y. Hamana and H. Matsumoto, A formula for the expected volume of the Wiener sausage with constant drift, *Forum Math.*, 29 (2017), 369-381.
doi:10.1515/fom-2016-0039

2. Y. Hamana and H. Matsumoto, Hitting times of Bessel processes, volume of the Wiener sausages and zeros of Macdonald functions. *J. Math. Soc. Japan* 68 (2016), 1615-1653.
doi:10.2969/jmsj/06841615

3. Y. Hamana and H. Matsumoto, Hitting times to spheres of Brownian motions with and without drifts. *Proc. Amer. Math. Soc.* 144 (2016), 5385-5396.
doi:10.1090/proc/13136

4. N. Ikeda and H. Matsumoto, The Kolmogorov operator and classical mechanics, *Séminaire de Probabilités XLVII*, 497-504, *Lecture Notes in Math.*, 2137, Springer, 2015.
doi:10.1007/978-3-319-18585-9_21

5. Y. Hamana and H. Matsumoto, Asymptotics of the probability distributions of the first hitting times of Bessel processes. *Electron. Commun. Probab.* 19 (2014).
Doi: 10.1214/ECP.v19-3215

〔学会発表〕(計6件)

1. 濱名裕治, 松本裕行, 「Wiener sausage の体積の漸近挙動について」, 2014年10月25日, 日本数学会九州支部例会(鹿児島大学)

2. 濱名裕治, 松本裕行, 「Hitting times of Brownian motion with and without drift」, 2015年1月23日, 新潟確率論ワークショップ(新潟大学駅南キャンパス「ときめいと」)

3. 濱名裕治, 松本裕行, 「ドリフトをもつブラウン運動の到達時刻と Wiener sausage について」, 2015年9月13日, 日本数学会秋期総合分科会(京都産業大学)

4. 濱名裕治, 松本裕行, 「Hitting times of Brownian motion with and without drift」, 2015年1月23日, 新潟確率論ワークショップ(新潟大学駅南キャンパス「ときめいと」)

5. 濱名裕治, 松本裕行, 「Precise asymptotic formulae for the first hitting times of Bessel processes」2017年1月6日, 研究集会「マルコフ過程とその周辺」(とくぎんトモニプラザ)

6. 濱名裕治, 松本裕行, 「Precise asymptotic formulae for the first hitting times of Bessel processes」2017年3月16日, 新潟確率論ワークショップ(新潟大学駅南キャンパス「ときめいと」).

〔図書〕(計1件)

1. H. Matsumoto and S. Taniguchi, 「Stochastic Analysis, Itô and Malliavin calculus in tandem」, *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*, 159. Cambridge University Press, Cambridge, 2017. xii+346 pp.
ISBN: 978-1-107-14051-6

〔その他〕

ホームページ

www.gem.aoyama.ac.jp/~matsumoto/index.html

6．研究組織

(1) 研究代表者

松本裕行(Hiroyuki Matsumoto)
青山学院大学・理工学部・教授
研究者番号：00190538

(2) 研究分担者 なし

(3) 連携研究者

濱名裕治(Yuji Hamana)
熊本大学・理工学研究科・教授
研究者番号：00243923

(4) 研究協力者

谷口説男(Setsuo Taniguchi)
九州大学・基幹研究員・教授
研究者番号：70155208