

平成 30 年 6 月 22 日現在

機関番号：32660

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2014～2017

課題番号：26400150

研究課題名(和文)非アルキメデスの距離空間上の階層依存性のあるディリクレ形式理論の俯瞰的構築

研究課題名(英文)Overviews and constructions of Dirichlet form theory on non-Archimedean space on a basis of hierarchical structure

研究代表者

金子 宏 (Kaneko, Hiroshi)

東京理科大学・理学部第一部数学科・教授

研究者番号：90194919

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,200,000円

研究成果の概要(和文)：確率論的ベッセル核により，木の末端空間にソボレフ・オーリッチ容量を定め，容量評価を，木構造によりクラス分けされた固有関数により合理的に行い，一点集合に関する容量評価を得た。ワイルの無理数回転と同様な役割をする擬似乱数列を $p$ 進整数環で見いだすため，ファン・デア・コルプト列を変形する方法があることがわかった。杉田・高信によるランダムワイルサンプリング理論へも発展できた。ベン・アモールの既存の研究を木に適用し，木の末端空間の基本的な部分集合に対する下からの容量評価を，二乗可積分な関数族の標準的な正規直交系が，ディリクレ形式に基づく直交系に必ずしも該当しない，既存の理論体系の枠組を拡大しつつ行った。

研究成果の概要(英文)：This project began with taking advantage of stochastic counterpart of the Bessel kernels and a framework on Sobolev-Orlicz capacity on ends of a tree has been invented so that capacity estimates are derived from a spectral analytical classification of eigenfunctions according to design of tree. In second, a modified Van der Corput sequence in the ring of  $p$ -adic integers has been introduced so as to be a counterpart of Weyl's irrational rotation on the unit interval. On the ring, a similar random Weyl sampling to the one by Sugita and Takanobu is also newly built. In third, Ben Amor's result which had shown an important relationship of Orlicz norm with a capacity estimate was focused on. As a result, capacity estimates for fundamental subsets in the ends of a tree have been found in terms of a Radon measure, where a canonical orthonormal basis in the family of square integrable functions can be freed from the orthogonality determined by Dirichlet form in existing formalisms.

研究分野：確率過程論

キーワード：マルコフ過程 木(ツリー) 超距離空間 関数空間 容量 統計的推論

1. 研究開始当初の背景 木構造(ツリーをここでは木構造と呼ぶ)は、それに付随する理想境界をとることにより、超距離空間が生み出されるなど、超距離空間との運動関係の必然的かつ重要な根拠となるはずであるという認識が、本研究課題の遂行開始当初、共有されつつあった。木構造は階層を持つ空間として最も基本的な空間であるため、木構造と超距離空間を有機的に結びつける議論として、自己相似性をもつ状態空間での解析手法が確立していた、マルコフ過程論が意味を伴うとの認識が持たれ始めていた。しかし、そのアプローチが多様な広がりを持つものとして十分認知されるほど、実質的な研究の幅を確保する段階への到達はまだみられず、グラフとしての木構造の上でのランダムウォークと、超距離空間上のマルコフ過程が完全に個別的に研究されていた。本研究課題開始前においては、両者を複眼的に捕捉すべく、自己相似性をもつ状態空間の確率解析手法が発展的に適用され得ることが示唆されつつあったが、Dirichlet 空間などの関数空間的手法をそのために俯瞰的に活用する研究には、至っていなかった。また、区間 $[0,1]$ における代表的擬似乱数として、無理数を自然数倍することにより得られる、いわゆるワイルの無理数回転があるが、 $p$  進整数数環におけるの対応概念も必ずしも明確ではなかった。
2. 研究の目的 本研究では階層構造に、ある種の位置指定を与えることで表現される  $p$  進数の階層構造的側面に着目しつつ、超距離空間などの階層構造に由来する対象の、状態空間としての確率論的特質を把握するために、自己相似性をもつ空間の確率解析手法の適用の一環として、Dirichlet 空間に代表される関数空間を体系的に導入し、さらに多様な関数空間の理論の適用の意味付けや、将来的なデータ解析等への応用を見据えた統計学的推論に供する固有関数系の活用を吟味する。 $p$  進整数数環におけるワイルの無理数回転の対応概念を明確化する。
3. 研究の方法 木構造において同一の分岐点を共有するいくつかの枝に対して異なる値をとりえる関数が生成する関数空間が、基本的な解析手法として根底にあるとするマルコフ過程論的把握を基本的方法とする。Dirichlet 空間及び、それに派生する Orlicz 空間に代表される関数空間による確率論的な構造把握を、超距離空間上で展開する。区間 $[0,1]$ における無理数回転の、 $p$  進整数数環におけるの対応概念が確立される

よう、有理数ではない  $p$  進整数に、ファン・デア・コルプト列の一般項を乗じたものを考察するなどにより、ワイルの無理数回転に対応する役割を果たすものを、 $p$  進整数数環において構成する。分割表などに基づいた従属性の見極めのための統計学的試論を、木構造が規定する固有関数に基づいて展開する。

4. 研究成果 (1) 木構造に、理想境界として付随する超距離空間において、測度対称性をもつマルコフ過程を特定する Dirichlet 空間の一つの標準的な生成方法として、同一の分岐点を共有するいくつかの枝に対し、異なる値を付与することで得られる関数から構成される関数族を基本的な関数族と捉える方法があることを申請者は探求しつつあった。その方法においては、すべての上述の基本的な関数族を含むように Dirichlet 空間の定義域が定められ、さらに、各関数族は、同一の分岐点から分岐する枝から枝へと動く酔歩を表す Dirichlet 空間の定義域としても自然な位置づけをもつものである。研究課題開始年度に、このようなアプローチが可能であることを論文として発表できたため、潜在的な発展性を期待し得るこの手法を、次年度以降も踏襲することにより、さらに多様な方向の展開が可能である事が分かった。具体的には以下の通りである。

(2) この方法論を踏襲したアプローチの有効な場面として、上記の二乗可積分性をもつ関数からなる空間における正規直交系に基づいて、Sobolev-Orlicz 容量を、推移確率を用いた確率論的な Bessel 核を適用することにより捕捉し、木構造の理想境界として出現する超距離空間における一点集合の Sobolev-Orlicz 容量に対する評価をすることができた。

(3) 上記(1)のアプローチ手法においては、二乗可積分性をもつ関数からなる関数空間において、ある標準的な構成法から構成される正規直交系と、生成作用素に対する固有関数系が一致することとなる。しかし、この種の二乗可積分性をもつ正規直交関数系が、必ずしもそのまま生成作用素の固有関数系とはなるとは限らない Dirichlet 空間が構成し得るかどうかにも自然に関心が注がれる。本研究課題の遂行により、異なる分岐点に付随する関数族にそれぞれ属する関数の組が、Dirichlet 形式といわれる双一次に基づいた意味での直交性を持たないようにすることで、上記の Dirichlet 空間の構成が可能となる事が新たに判明した。

これにより、木構造の理想境界として出現する超距離空間におけるマルコフ過程として、推移確率にこれまでにない複雑さの備わったものが、Dirichlet 空間の理論の適用により生成されることも明らかにできた。

(4) 上記(3)の場合に、木構造の理想境界として出現する超距離空間において、Dirichlet 形式に基づいた、確率論的意味の伴う容量の評価のために、Orlicz 空間を、二乗可積分性をもつ関数空間における正規直交関数系から構成し、一点の容量についての評価が、判別しやすい一定の条件のもとで、なされることも明らかにした。

つまり、確率過程論においてよく用いられる Dirichlet 関数空間よりも適用事例が少ない Orlicz 空間を導入する技法は、容量に対する、より精密かつ有効な手法にほかならないことが確認できた。この考察に基づき、一点集合が容量零となる十分条件を与えるなど、木構造が超距離空間に対して、有効に機能する状況を生むことが具体例の提示も含む形で提示できた。

(5) さらに、有理数ではない  $p$  進整数に、ファン・デア・コルプト列の一般項を乗じたものから、 $p$  進整数部分を取りだして得られる数列を考察することにより、 $p$  進整数環における稠密な部分集合が得られることが分かった。更に、杉田・高信による、多次元トーラスにおける一様分布に従う乱数を組み込んだ、擬似乱数生成方法があるが、 $p$  進整数環においても、上記のファン・デア・コルプト列の一般項倍の活用により、杉田・高信が示した理論を、 $p$  進整数環において構築する段階まで、到達できることが解明できた。

(6) 指導していた修士課程の大学院生に対し、分割表に基づいて従属性を見極めるための統計学的試論を、展開することを推奨し、木構造に出現する固有関数に基づいて、修士論文を下記としてまとめられる形に導いた。

#### 引用文献

山口 峻宏 マルコフ過程に付随する固有関数による仮説検定, 平成 28 年度東京理科大学理学研究科数学専攻修士論文.

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

#### [雑誌論文](計 4 件)

Chiaki Hara, Ryutaro Iijima, Hiroshi Kaneko, Hisaaki Matsumoto, Orlicz norm and Sobolev-Orlicz capacity on ends of tree space based on probabilistic Bessel kernels,  $p$ -adic numbers Ultrametric Analysis, and Applications, 査読有, 7, 2014, 24-38.  
10.1134/S2070046615010033.

Hiroshi Kaneko, A Dirichlet space on ends of tree and Dirichlet forms with a nodewise orthogonal property, Potential Analysis, 査読有, 41, 2014, 245-268.  
1007/s11118-013-9372-7.

Hiroshi Kaneko, Hisaaki Matsumoto, A pairwise independent random sampling method in the ring of  $p$ -adic integers, 査読有, Osaka J. Math., 2016, 775-798.

Ryutaro Iijima, Hiroshi Kaneko, Capacitary estimate on the space of ends of tree based on Orlicz norm, Facta Universitatis, Series Physics, Chemistry and Technology, 査読有, 14, 2016, 120-127.

#### [学会発表](計 2 件)

Hiroshi Kaneko, Dirichlet space and Orlicz space on ends of tree associated with nodewise given Dirichlet forms with tier-linkage, Stochastic Processes, Analysis and Mathematical Physics, Kansai University, 2014, 8月25日.

Hiroshi Kaneko, An Orlicz space on ends of tree and superposition of nodewise given Dirichlet forms with tier-linkage, 2015 International Conference on  $p$ -ADIC MATHEMATICAL PHYSICS AND ITS APPLICATIONS, Mathematical Institute of the Serbian Academy of Sciences and Arts, 2015, 9月10日.

#### [図書](計 2 件)

Stochastic analysis and applications 2014, Shigeki Aida, Dominique Bakry, Erich Baur, Jean Bertoin, René Carmona, Thomas Cass, Martin Clark, Dan Crisan, Ana Bella Cruzeiro, Alexander Davie, François Delarue, Joscha Diehl, Yidong Dong, David Elworthy, Peter K. Friz, Hans Föllmer, Masatoshi Fukushima, Tomoyuki Ichiba, Hiroshi Kaneko, Claudia Klüppelberg, Ioannis Karatzas, Remi Lassalle,

David Nualart, Harald Oberhauser, Zhenjie Ren, Marta Sanz-Solé, Ronnie Sircar, André Süß, Nizar Touzi, Jianfeng Zhang, Springer-Verlag, 2014, 503.

Festshrift Masatoshi Fukushima, Sergio Albeverio, Martin Barlow, Krzysztof Burdzy, Nicolas Bouleau, Louis H Y Chen, Mu-Fa Chen, Xin Chen, Shizan Fang, Patrick J Fitzsimmons, Hans Föllmer, Wolfhard Hansen, Yves Le Jan, Masanori Hino, Hiroshi Kaneko, Witold Karwowski, Daehong Kim, Panki Kim, Kazuhiro Kuwae, Shinichi Kotani, Liping Li, Zhi-Ming Ma, Hideo Nagai, Fumihiko Nakano, Bernt Øksendal, Yoichi Oshima, Irina Penner, Andrey Pilipenko, Guillaume Poly, Jay Rosen, Michael Röckner, René L. Schilling, Ichiro Shigekawa, Renming Song, Ludwig Streit, Agnès Sulem, Karl-Theodor Sturm, Wei Sun, Adám Timár, Matsuyo Tomisaki, Zoran Vondraček, Li-Fei Wang, Agnès Sule, Feng-Yu Wang, Jian Wang, Tusheng Zhan, Jiangang Ying, World Scientific, 2015, 620.

〔産業財産権〕

出願状況（計 0 件）

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
出願年月日：  
国内外の別：

取得状況（計 0 件）

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
取得年月日：  
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等

## 6 . 研究組織

### (1)研究代表者

金子 宏 (KANEKO, Hiroshi)

東京理科大学・理学部第一部数学科・教授  
研究者番号：90194919

### (2)研究分担者

( )

研究者番号：

### (3)連携研究者

( )

研究者番号：

### (4)研究協力者

( )