様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　２ 年　 ６ 月 １５ 日現在

機関番号：３２６８９
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2014～2019
課題番号：２６４００１５１

研究課題名（和文）平坦構造によるタイヒミュラー・モジュラー群の研究

研究課題名（英文）Study on Teichmuller modular groups through flat structures

研究代表者
小森　洋平（KOMORI, YOHEI）

早稲田大学・教育・総合科学学術院・教授

研究者番号：７０２６４７９４

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,500,000円

研究成果の概要（和文）：タイヒミュラー・モジュラー部分群と幾何学的コクセター群との類似の観点から、コクセター系から擬アノソフ写像を構成し、その拡大率を調べた。具体的にはA型のアファインコクセター系の頂点の1つに１辺付け加えたコクセター系を扱った。今回の研究では頂点数が偶数の場合にコクセターグラフの２重被覆をとったグラフに対応するコクセター系が、 頂点数がが8以下なら双曲的で、10以上なら高階数というクラスになることを示した。今回の結果の応用として拡大率が２サラム数になる擬アノソフ写像族が構成できた。

研究成果の学術的意義や社会的意義
曲面から曲面自身への自己同相写像の反復合成を曲面上の離散的な時間発展と思うと、曲面の種類及び同相写像の種類により複雑になる。特に種数が２以上の曲面における擬アノソフ写像は、伸びる方向と縮む方向に分解でき、トーラスの場合の双曲変換の類似になっている。この伸縮の割合を擬アノソフ写像の拡大率といい、その数論的性質など詳しく調べられている。
今回の研究では鏡映変換から定まるコクセター系という代数系を用いて、２サラム数という代数的整数を拡大率に持つ擬アノソフ写像を構成した。

研究成果の概要（英文）：Following the closed connection between Teichmuller modular subgroups and geometric Coxeter groups,
we constructed pseudo-Anosov mappings from Coxeter systems and considered their growth rates. Our Coxeter systems were obtained from affine Coxeter diagrams by adding one edge. Taking the double coverings of these diagrams, we showed that our Coxeter systems belong to hyperbolic class when the number of vertices of diagrams are less than or equal to 8, while they belong to higher rank class when the number of vertices of diagrams are more than or equal to 10. As an application of our result, we can construct a series of pseudo-Anosov mappings whose growth rates are 2-Salem numbers.

研究分野：リーマン面の変形理論

キーワード：リーマン面　コクセター群　サラム数

１．研究開始当初の背景

Sを向きづけられた点付きの閉曲面とする。S上の複素構造全体には、Sの向きを保つ同相写像全体のなす群$\mathrm{Homeo}_+(S)$が作用して、その商空間M(S)をSのモジュライ空間という。$\mathrm{Homeo}_+(S)$の恒等写像の連結成分$\mathrm{Homeo}_0(S)$からなる正規部分群でS上の複素構造全体を割った空間T(S)をタイヒミュラー空間という。つまりT(S)はM(S)の普遍軌道体被覆で、被覆変換群 $\mathrm{Mod}(S):=\mathrm{Homeo}_+(S)/\mathrm{Homeo}_0(S)$をタイヒミュラー・モジュラー群という。タイヒミュラー空間には自然な距離(タイヒミュラー距離)や複素構造が入り、Mod(S)は等長変換群でありかつ複素解析的自己同型群でもある。このようにタイヒミュラー空間の複素解析幾何や双曲幾何を考察するには、タイヒミュラー・モジュラー群の研究は欠かせない。 タイヒミュラー空間T(S)はS上の複素構造の変型空間であるが、典型的な複素構造の変型の方法として擬等角写像による変型がある。実際、擬等角写像を用いてT(S)上のタイヒミュラー距離や複素構造が定義される。そのような擬等角変型のうち特に深く研究されている方法が、以下のような平坦構造による変型である。JをSの複素構造とし、qをリーマン面(S,J)上の2次微分とする。qの平方根をS上で複素積分することにより、S上の複素座標ζが得られる(自然座標)。このζにSL(2,R)の元を合成することで複素構造が変型できる。これが平坦構造(J, q)による変型である。このように定まるSL(2,R)からT(S) への写像は上半平面$H^2=SL(2,R)/SO(2)$からT(S)への正則写像$f:H^2\to T(S)$を誘導する。この像 $f(H^2)$をタイヒミュラー円板と呼ぶ。 このタイヒミュラー円板を保つタイヒミュラー・モジュラー部分群$\mathrm{Stab}(f(H^2))$からPSL(2,R)へ自然な準同型$DAf : \mathrm{Stab}(f(H^2)) \to PSL(2,R)$が定まり、楕円型のタイヒミュラー・モジュラー 変換は有限位数のメビウス変換に、デーン・ツイストは放物型のメビウス変換に、そして擬アノソフ写像は双曲型のメビウス変換に移る。特に擬アノソフ写像の拡大率は、対応する双曲型のメビウス変換の拡大率に一致する。また像$DAf(\mathrm{Stab}(f(H^2)))$ はヴィーチ群と呼ばれるフックス群になり、近年盛んに研究されている。このようにタイヒミュラー円板を保つタイヒミュラー・モジュラー部分群から擬アノソフ写像が得られるが、逆に任意の擬アノソフ写像に対し、それが保つタイヒミュラー円板がただ1つ存在することもベアスにより示されている。このように擬アノソフ写像というタイヒミュ ラー・モジュラー変換の研究には、タイヒミュラー円板つまり平坦構造が不可欠な道具になっている。

２．研究の目的

平坦構造を具体的に構成する方法の１つとして、サーストンは２組の多重単純閉曲線族 A, Bによるデーン・ツイストT_A,T_Bからなるタイヒミュラー・モジュラー部分群から平坦構造を構成した。(W. Thurston, “ On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces ”, Bull. Am. Math. Soc. 19 (1988) 417-431.) この構成では生成される擬アノソフ写像の拡大率がT_A,T_Bの情報から計算できる利点がある。そこで今回はこのサーストンによる平坦構造の構成、およびその後のマクマレン、レイニンガーによる研究を基として、タイヒミュラー円板とそれを保存する擬アノソフ写 像の研究を行うことを研究目的とした。具体的には次の２つのテーマを中心に研究を進めた。

1.「幾何学的コクセター群との類似」　2組の多重単純閉曲線族A,Bの各成分である単純閉曲線を頂点とし、交わる場合に交点数の数だけの線分で頂点どうしを結ぶと2部グラフができる。このグラフから二次形式とそれを保存する鏡映群が定義される。これを幾何学的コクセター群という。マクマレンは、幾何学的コクセター群の任意の元のスペクトル半径は、1でないならばレーナー数 (1.1762808...) 以上になることを示した。(C. McMullen, “ Coxeter groups, Salem numbers and the Hilbert metric ”, Publ. Math., Inst. Etud. Sci. 95 (2002) 151-183.) 一方多重単

純閉曲線族 A,B によるデーン・ ツイストT_A,T_Bからなるタイヒミュラー・モジュラー部分群に含まれる任意の擬アノソフ写像の拡大率は、レーナー数以上になることをレイニンガーは示した。(C. Leininger, “On groups generated by two positive multi-twists: Teichm2uller curves and Lehner's number”, Geometry and Topology Vol. 8 (2004) 1301-1359.)またデーン・ツイストの積T_AT_Bからなる擬アノソフ 写像の拡大率が、対応するコクセター群のコクセター変換$\sigma_A\sigma_B$ のスペクトル半径に一致することも示した。このように平坦構造から定まるタイヒミュラー・モジュラー部分群と幾何学的コクセター群との類似をさらに追求し、双曲コクセター群のgrowth ratesに対応する量をタイヒミュラー・モジュラー部分群で考察した。

2.「擬アノソフ写像の拡大率の数論的性質」１より大きい実代数的整数がサラム数であるとは、その逆数が共役元で、それ以外の共役元はすべて単位円周上にあるような数である。上記の1.で現れたレーナー数は最小のサラム数と予想されている数である。上記のマクマレンおよびレイニンガーの結果から、多くの場合にデーン・ ツイストの積T_AT_Bからなる擬アノソフ写像の拡大率はサラム数になることが分かる。ではどのようなサラム数が擬アノソフ写像の拡大率として実現されるか、またサラム数を拡大率として持つ擬アノソフ写像の複素解析的または双曲幾何的性質は何かについて考察する。またサラム数の極限として得られるピゾ数、サラム数の一般化である２サラム数なども擬アノソフ写像の拡大率として実現できるかについて調べた。

３．研究の方法

研究代表者は双曲コクセター群の growth rates がペロン数になることを、4元生成と5生成の双曲コクセター群について示し、２０１３年度開催されたミッタグ・レフラー研究所での国際会議で報告した。これら双曲コクセター群の growth rates についてはフリブール大学の Kellerhals 教授と長年にわたり研究連絡を続けてきた。特に２０１７年には１ヶ月フリブール大学に滞在し、2サラム数を拡大率に持つ擬アノソフ写像の構成について Kellerhals 教授やベルン大学の Emery 教授と議論する機会があった。また２０１８年のボン大学での国際研究集会で知り合ったエジンバラ大学の C.Smyth 教授とは、１週間という短い集会の期間に集中的に議論を行い、Mossinghoff によって分類された小さい次数のサラム多項式のリストを用いて、２サラム数を増大度に持つコクセター系の無限族が共同研究で構成できた。このボンの集会ではコクセター絡み目を研究している南フロリダ大学の広中えり子教授から,コクセター群の増大度とコクセター元のスペクトル半径の間のマッカイ対応について刺激的な示唆を受けたことも、今後の研究の方向性を決める重要なきっかけとなった。これらの結果は２０２０年のオーバーヴォールファッハ研究所での負曲率空間の集会でも話す機会を得た。国内では定期的に日本数学会年会の幾何学分科会および関数論分科会の一般講演で研究報告を行い、この３月には関数論分科会で今回の研究結果について特別講演を行う予定であった。平坦構造の研究については大阪大学の宮地秀樹氏や２０１４年から学振 PD で研究代表者の研究室に所属していた静岡大学の四之宮佳彦氏との定期的なセミナーを通して議論を深めた。

４．研究成果

1.「幾何学的コクセター群との類似」 タイヒミュラー・モジュラー部分群と幾何学的コクセター群との類似の観点から、コクセター系から擬アノソフ写像を構成し、その拡大率を調べた。具体的にはA型のアファインコクセター系の頂点の1つに１辺付け加えたコクセター系を扱った。今回の研究では頂点数が偶数の場合にコクセターグラフの２重被覆をとったグラフに対応するコクセター系が、 頂点数がが8以下なら双曲的で、10以上なら高階数というクラスになることを示した。今回の結果の応用として拡大率が２サラム数になる擬アノソフ写像が構成できた。頂点数が奇数ならばコクセターグラフは双曲的かつ結晶的な2部グラフになるので、マクマレンの結果より２部コクセター元のスペクトル半径はサラム数になる。具体的には以下のサーストンの構成を用いる。種数が2以上のコンパクトで向 き付け可能な曲面上の2組の多重単純閉曲線族AとBを考える。それらの各成分である単純閉曲線を頂点とし、交わる場合にのみ交点数の数だけの線分で頂点どうしを結ぶことにより2部グラフができる。このグラフから二次形式が得られ、

その二次形式を保つような鏡 映群が定義される。このときデーン・ツイストの積ABからなる擬アノソフ写像の拡大率が、対応するコクセター群の2部コクセター元のスペクトル半径に一致することをレイニンガーは示した。そこで今回の Ah_{10} の2重被覆をとった2部グラフに対応する単純閉 曲線を種数10の閉曲面に描き、互いの交わらない10個の単純閉曲線の族AとBの積のデーン・ツイストの積ABからなる擬アノソフ写 像の拡大率を考えると２サラム数になることが分かった。

2.「擬アノソフ写像の拡大率の数論的性質」　コクセター系(W,S)の生成系Sによる、群Wの母関数（増大度関数）の収束半径の逆数は増大度と呼ばれ、Sの元が鏡映として空間に離散的に作用する際、Wの基本領域である多面体が空間をタイル張りする拡がり方を表す量である。一方(W,S)から｜S｜-次元実アファイン空間に W-不変な２次形式Bが定義され、(W,S)の幾何学的実現と呼ばれるWから直交群O(V, B)への単射準同型が定まる。この時コクセター元と呼ばれるWの元のスペクトル半径が、(W,S)の幾何学的実現から一意に決まる。今回の研究ではZehrt及び梅本が調べたコンパクト４次元双曲コクセター系の増大度が、常に２サラム数になることを示した。証明のアイデアは以下の通りである。Zehrtのコクセター系の増大度関数の分母多項式は次数が１６で。梅本のコクセター系の増大度関数の分母多項式は次数が１８である。さらに根の分布から分母多項式は２サラム多項式か、サラム多項式の積に分解するかのどちらかになることが分かる。もしサラム多項式の積に分解するならば、既約因子はそれぞれ１４次以下、１２次以下のサラム多項式になるはずである。しかしMossinghoffによって分類された小さい次数のサラム多項式のリストにこれらの多項式は現れていないことから、Zehrtと梅本のコクセター系の増大度関数の分母多項式は２サラム多項式、つまり増大度は２サラム数になることが分かった。このようにMossinghoffによって分類された小さい次数のサラム多項式のリストを用いて、２サラム数を増大度に持つコクセター系の無限族が構成できたことは興味ある結果と思う。以上の結果はエジンバラ大学のC.Smythとの共同研究である。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計6件（うち査読付論文　3件／うち国際共著　1件／うちオープンアクセス　2件）

１．著者名 梅澤 瑠奈・小森 洋平・安井 拓朗	４．巻 67
２．論文標題 古典幾何における内接五角形の面積公式	５．発行年 2019年
３．雑誌名 早稲田大学教育総合科学学術院　学術研究（自然科学編）	６．最初と最後の頁 11-24
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 Y. Komori and Y. Umemoto	４．巻 B66
２．論文標題 On 3-dimensional hyperbolic Coxeter pyramids	５．発行年 2018年
３．雑誌名 RIMS Kokyuroku Bessatsu	６．最初と最後の頁 213-230
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 小森洋平、利根川真隆、雪田友成	４．巻 65
２．論文標題 立方体と分割合同な三角錐の構成について	５．発行年 2016年
３．雑誌名 学術研究　早稲田大学　教育・総合科学学術院	６．最初と最後の頁 1-14
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

１．著者名 Yohei Komori and Tomoshige Yukita	４．巻 Volume 91, Number 10
２．論文標題 On the growth rate of ideal Coxeter groups in hyperbolic 3-space	５．発行年 2015年
３．雑誌名 Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.	６．最初と最後の頁 155-159
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.3792/pjaa.91.155	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する

１．著者名 M. Gendulphe and Y. Komori	４．巻 1
２．論文標題 Polyhedral realization of a Thurston compactification	５．発行年 2014年
３．雑誌名 Ann. Fac. Sci. Toulouse, Math.	６．最初と最後の頁 95-114
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.5802/afst.1398	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 小森洋平・雪田友成	４．巻 63
２．論文標題 射影図を用いた双曲コクセター理想多面体の分類	５．発行年 2014年
３．雑誌名 学術研究	６．最初と最後の頁 47-56
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

〔学会発表〕　計11件（うち招待講演　7件／うち国際学会　2件）

１．発表者名 Yohei Komori
２．発表標題 Growth of hyperbolic Coxeter groups
３．学会等名 Growth in Topology and Number Theory: Volumes, Entropy, and L2-torsion（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2018年

１．発表者名 Yohei Komori
２．発表標題 On spectral radii of Coxeter elements for some bipartite Coxeter diagrams
３．学会等名 Geometry seminar at University of Fribourg（招待講演）
４．発表年 2017年

１．発表者名 Yohei Komori
２．発表標題 Growth functions of hyperbolic groups
３．学会等名 colloquium talk at University of Fribourg（招待講演）
４．発表年 2017年

１．発表者名 小森洋平
２．発表標題 Construction of pseudo-Anosov automorphisms whose dilatations are 2-Salem numbers
３．学会等名 日本数学会
４．発表年 2018年

１．発表者名 Yohei Komori
２．発表標題 On Schwarz automorphic functions
３．学会等名 Topology and Analysis of Discrete Groups and Hyperbolic Spaces（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2016年

１．発表者名 小森洋平
２．発表標題 ３次元双曲理想コクセター多面体の増大度について
３．学会等名 日本数学会2015年度秋季総合分科会
４．発表年 2015年

１．発表者名 小森洋平
２．発表標題 トーラス上のリーマン面の退化族について
３．学会等名 学習院大学トポロジーセミナー（招待講演）
４．発表年 2014年

１．発表者名 小森洋平
２．発表標題 トーラス上のリーマン面の退化族について
３．学会等名 早稲田双曲幾何幾何学的群論セミナー
４．発表年 2014年

１．発表者名 Yohei Komori
２．発表標題 Arithmetic aspects of growth rates for hyperbolic Coxeter groups
３．学会等名 Complex Hyperbolic Geometry and Related Topics（招待講演）
４．発表年 2015年

１．発表者名 Yohei Komori
２．発表標題 Projective embeddings of the Teichmuller spaces
３．学会等名 「リーマン面・不連続群論」研究集会（招待講演）
４．発表年 2015年

１．発表者名 小森洋平
２．発表標題 Coxeter garlands と 2-Salem 数
３．学会等名 日本数学会２０１５年度年会幾何学分科会一般講演
４．発表年 2015年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考