

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 30 年 6 月 14 日現在

機関番号：12101

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2014～2017

課題番号：26400156

研究課題名(和文) 拡散 - 非拡散物質から成る反応系における相互作用とダイナミクスの関連性の探究

研究課題名(英文) The dynamics of a system of a single reaction-diffusion equation coupled with an ordinary differential equation

研究代表者

鈴木 香奈子 (Kanao, Suzuki)

茨城大学・理学部・准教授

研究者番号：10451519

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：自己増殖作用をもつ非拡散物質と拡散物質の相互作用を記述した反応拡散系について、特に解の爆発に着目し、相互作用と解のダイナミクスの関連を考察した。考察する系は、例えば肺がんのモデルなどが知られており、実際の現象を記述する数理モデルとして重要な役割を果たす。本研究では、有限時間爆発する系と無限時間爆発する系があることを示した。どちらの場合も、対応する常微分方程式系の解は時間大域的に存在しかつ有界である。従って、拡散の影響で爆発が起こることを明らかにした。有限時間爆発については、構成的に示すことで爆発の形状も明らかとなり、無限時間爆発については、そのメカニズムになり得る弱定常解の存在を示した。

研究成果の概要(英文)：The dynamics of a system of a single reaction-diffusion equation coupled with an ordinary differential equation was studied. Such systems arise, for example, from modeling of interactions between processes in cells and diffusing signaling factors. I particularly considered the blowup phenomena to understand a relationship between the dynamics and a diffusion-driven instability, which is a mechanism to obtain spatially heterogeneous states in pattern formation phenomena.

It was shown that the system has blowup solutions and, depending on nonlinearity, they can blow up either in finite or infinite time. Concerning the blowup in finite time, sufficient conditions for initial data are obtained, and we could see the shape of solutions at blowup time. Moreover, it was shown that some systems have unbounded weak stationary solutions, which can be key to understand the mechanism of blowup infinite time.

研究分野：非線形解析学

キーワード：反応拡散系 パターン形成 解の爆発

1. 研究開始当初の背景

自然界に見られるパターンの自律的形成のメカニズム解明は、数理生物学の分野で高い関心を集める課題の一つである。数学からのアプローチでは、20世紀半ばに、A. Turing が異なる拡散率をもつ二種類の粒子が相互作用をしつつ拡散するとき、空間的非一様性が出現し得るという「拡散誘導不安定化」の原理を提唱して以来、この原理に基づく数理モデルが数多く構築されている。特に活性因子 - 抑制因子系と呼ばれる反応拡散系は、自然界に実在するパターン形成の有力なモデルの一つであり、多くの現象に対して数値実験が成され、実際の現象をよく説明できることが分かっている。拡散誘導不安定化に基づく古典的なパターン形成の数理モデルは、次のような方程式系で記述される：

$$(式1) \quad \begin{cases} u_t = \varepsilon^2 \Delta u + f(u, v), \\ v_t = D \Delta v + g(u, v). \end{cases}$$

活性因子 - 抑制因子系においては、未知関数 $u = u(x, t)$ が活性因子、 $v = v(x, t)$ が抑制因子と呼ばれる化学物質の濃度を表し、抑制因子が活性因子よりも速く拡散し、空間領域遠方での活性因子の生産を抑制することで、自己増殖作用をもつ活性因子の濃度が局所に集中する空間パターンが生じることが期待される。

(式1)に対する理論面からの研究は、特に空間パターンに対応する定常解について、領域の境界上や内部の点に集中するスパイク解の存在や、さらに領域のある部分集合上に集中する解の存在が知られている。しかし、初期値 境界値問題の解の時間大域的挙動に関しては、まだ解明されていない部分も多い。

(式1)の形によるパターン形成の数理モデルでは、実際の現象において活性因子や抑制因子の役割を果たす物質が特定されていない場合が多く、近年ではより実際の現象に

基づいた数理モデルの構築が盛んに行われている。特に、以下の二つの特徴をもつ方程式系が多く見られるようになってきた：

(1) 細胞増殖のような局所的プロセスと拡散物質による相互作用を記述した系、

(2) 領域上の積分項による非局所項が入った、領域全体の影響を考慮した方程式。

例えば(1)の例として、肺胞上皮がん初期に見られる巨視的な空間パターン形成を説明する反応拡散系が知られている (A. Marciniak-Czochra and M. Kimel (2006, 2007, 2008))。これらは実際の観察に基づく数理モデルであり、(式1)とは形が異なる。しかし、細胞密度の空間非一様性を誘導するメカニズムとして拡散誘導不安定化が用いられていることが多く、そこに生物学的な裏付けは乏しい。これらの数理モデルに対しては理論面からの研究はまだ少なく、数値実験によって解の振る舞いが調べられている。

上述した(1)に対する数理モデルは、次のような系で与えられる：

$$(式2) \quad \begin{cases} u_t = f(u, v), \\ v_t = D \Delta v + g(u, v). \end{cases}$$

ここで非線形項 f と g は、実際の現象から推測される相互作用を表す項である。(2)に対する系は、非局所項を新たに未知関数として導入することにより、(式2)に帰着できる場合がある。(式2)が拡散誘導不安定化に基づいている場合、実際の現象に基づいてモデルを構築し異なる相互作用を導入したにもかかわらず、類似した数値実験結果が得られる場合が多い。つまり、現象の本質が表わされていない、もしくは数値実験では見えない部分に重要な性質が隠れている、などが考えられる。これらを理解するには、理論研究が不可欠である。

これまでに平成23年度 25年度若手研究(B)で、拡散誘導不安定化に基づく(式2)の定常解の不安定性と解の挙動について研

究を行った．ここで得られた結果は，(式1)によるパターン形成のモデルのダイナミクスとは全く異なるものであることを明らかにした．

2．研究の目的

目的は，常微分方程式と反応拡散系の連立から成る(式2)の形をもつ系の解のダイナミクスを理解することである．

最近では，パターン形成の数理モデル以外にも拡散誘導不安定化のアイデアが用いられる場合がある．例えば，神経膠腫と呼ばれる脳腫瘍が浸潤する過程を説明する数理モデルにおいては，拡散誘導不安定化のアイデアは細胞浸潤のON/OFFを切り替えるメカニズムとして導入されている．この数理モデルにおいては，解がどのように時間発展するかの過程も重要である．ゆえに，(式2)において拡散誘導不安定化が解のダイナミクスにどのような影響を与えているか(式1)との違いによって理解する．

(式2)の解析では，(式1)のようにすべての式に拡散が含まれる場合の解析手法がそのまま適用できない場合があり，解の存在や有界性すら明らかではない．ゆえに，新たな解析手法の構築も重要な研究目的の一部となる．

3．研究の方法

常微分方程式と反応拡散方程式の連立系の最も単純な形として，(式2)の形で与えられる2連立系を， N 次元ユークリッド空間の滑らかな境界を持つ有界領域 Ω で考える．拡散項をもつ $v = v(x, t)$ に関する方程式に対しては， Ω の境界上でノイマン境界条件を課す．

平成23年度 25年度若手研究(B)の研究において，(式2)で拡散誘導不安定化に基づく系に対しては，滑らかな定常解はすべて不安定であること，拡散係数を無限大とした極限系の解の爆発について示した．この知

見を基に，定常解の安定性については，不安定性と拡散誘導不安定化の関連をより深く理解し，拡散誘導不安定化を持たない系の定常解の安定性についても考察する．これにより，拡散誘導不安定化と定常解の安定性の関連が明らかとなる．また，これまで一般の(式2)については定常解の存在を議論してこなかった．従って，一般の系に対する定常解の構成方法を考察する．

解の時間大域的挙動については，拡散係数を無限大としない元の系の爆発現象についてより詳細な解析を行う．有限時間爆発する系については，初期値の条件及び爆発する際の解の形状を明らかにする．ここでは，(式2)の常微分方程式を解いて，単独の楕円型方程式に対する境界値問題に帰着できることを用いて解析を行う．無限時間爆発する系については，有限時間爆発の解析に有用な手法である常微分方程式の解との比較が使えないので，技術的な困難がある．ここでは，滑らかでない定常解(弱解)の存在と安定性という面からアプローチ出来ないか考察する．解の時間大域的挙動については，数値実験により挙動の予測を立てることも重要となる．従って，数値計算にも一定の時間を割く．

4．研究成果

爆発解について得られた結果を要約する．有限時間爆発解について，これまでの研究により，それぞれの非線形項が資源-消費者型と活性因子-抑制因子型の場合に，有限時間爆発する解の存在が分かっていた．これらについて，爆発解を誘導する初期値の十分条件を示し，解が爆発する形状をよく理解することが出来た(5．主な発表論文(3),(4))．非線形項の特性に注意して解の評価を得る際のアイデアは，類似した非線形項に対しても有効であり，有限時間爆発解の解析手法として一つの方針を与えることが出来た．

無限時間爆発する解については，飽和型の非線形項を持つ発ガンの数理モデルにおいて $D \rightarrow \infty$ とした極限方程式系

$$(式4) \quad \begin{cases} u_t = f(u, \xi), \\ \xi_t = \int_{\Omega} g(u(x, t), \xi(t)) dx. \end{cases}$$

に関して，すでに得られていた結果より爆発解を誘引する初期値の条件を改良することが出来た（5．主な発表論文（1））．元の（式2）の形の系の無限時間爆発については，解の評価を得る手掛かりとなり得る，非有界な弱定常解の存在を示すことが出来た．これについては，引き続き安定性など詳しい解析を行う予定である．

定常解の不安定性については，（式2）の常微分方程式の非線形項が持つ自己増殖作用に関する仮定を緩めることができた（5．主な発表論文（2））．

5．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕(計 4 件)

- (1) Anna Marciniak-Czochra, Steffen Harting, Grzegorz Karch and Kanako Suzuki, *Dynamical spike solutions in a nonlocal model of pattern formation*, *Nonlinearity* vol.31, 2018, 1757-1781, 査読有, DOI:10.1088/1361-6544/aaa5dc
- (2) Anna Marciniak-Czochra, Grzegorz Karch and Kanako Suzuki, *Instability of Turing patterns in reaction-diffusion-ODE systems*, *Journal of Mathematical Biology* vol.74, 2017, 583-618, 査読有, DOI: 10.1007/s00285-016-1035-z
- (3) Anna Marciniak-Czochra, Grzegorz Karch, Kanako Suzuki and Jacek Zienkiewicz, *Diffusion-driven blowup of nonnegative solutions to reaction-diffusion-ODE systems*,

Differential and Integral Equations vol.29(7/8), 2016, 査読有, <https://projecteuclid.org/euclid.die/1462298682>

- (4) Grzegorz Karch, Kanako Suzuki and Jacek Zienkiewicz, *Finite-time blowup of solutions to some activator-inhibitor systems*, *Discrete Continuous Dynamical System-A*. vol.36(9), 2016, 査読有, DOI: 10.3934/dcds.2016016

〔学会発表〕(計 9 件)

- (1) 鈴木香奈子, Reaction-diffusion-ODE system の定常解の不安定性と解の挙動, 北陸応用数理研究会 2018, 2018年2月20日, 石川県政記念しいのき迎賓館セミナールーム B
- (2) 鈴木香奈子, Reaction-diffusion-ODE system の定常解の安定性とダイナミクス, RIMS 共同研究(公開型)「非線形現象と反応拡散方程式」, 2017年10月27日, 京都大学数理解析研究所
- (3) 鈴木香奈子, Unstable patterns and phenomena in some reaction-diffusion-ODE systems, RIMS 共同研究(グループ型)「反応拡散方程式と非線形分散型方程式の解の挙動」, 2017年9月27日, 京都大学数理解析研究所
- (4) 鈴木香奈子, Turing 不安定性をもつ Reaction-diffusion-ODE 系のダイナミクスと空間パターン, 拡散成分と非拡散成分が共存する反応拡散系がつくるパターン, 2017年2月12日, 東北大学理学部数理科学記念館
- (5) 鈴木香奈子, Turing 不安定性をもつ reaction-diffusion-ODE system の解のダイナミクス, Turing 機構に関連するパターンとダイナミクス, 2015年12月19日, 広島大学理学研究科
- (6) Kanako Suzuki, Unbounded solutions

to some reaction-diffusion-ODE systems modeling pattern formation, 「偏微分方程式の解の形状と諸性質」, 2015年11月12日, 京都大学数理解析研究所

- (7) 鈴木香奈子, Reaction-diffusion-ODE system から考えるパターン形成-Turing 不安定性とダイナミクス, 生物現象におけるパターン形成と数理, 2015年10月23日, 京都大学数理解析研究所
- (8) 鈴木香奈子, Blowup phenomena in some reaction-diffusion-Ode systems induced by Turing instability, パターン生成とダイナミクスの解構造の探求, 2015年6月28日, 北海道大学
- (9) Kanako Suzuki, Turing instability and spatial patterns to reaction-diffusion equations modeling biological pattern formation, Mini-workshop on Models of Directional Movement and their Analysis, 2015年3月27日, 東北大学理学部数理科学記念館

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 0 件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
出願年月日:
国内外の別:

取得状況(計 0 件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
取得年月日:
国内外の別:

〔その他〕
ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

鈴木 香奈子 (SUZUKI kanako)
茨城大学・理学部・准教授
研究者番号: 10451519

(2) 研究分担者

()

研究者番号:

(3) 連携研究者

()

研究者番号:

(4) 研究協力者

()