

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 20 日現在

機関番号：12614

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2014～2016

課題番号：26400159

研究課題名(和文) 逆問題の存在定理

研究課題名(英文) Existence theorems in inverse problems

研究代表者

上村 豊 (Kamimura, Yutaka)

東京海洋大学・学術研究院・教授

研究者番号：50134854

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,700,000円

研究成果の概要(和文)：移流拡散方程式の速度場と拡散項をトレーサーデータから決定する逆問題の、再構成公式、存在定理、同定定理を確立した。この問題との関連で、エネルギー依存無反射散乱を実現するポテンシャルの再構成公式を導出し、束縛状態が1つの場合のポテンシャルの存在定理を確立した。また、非線形微分方程式の解の爆発時間から非線形項を定める逆問題を研究し、非線形項の大域的存在定理を確立した。これらの逆問題の数理構造を明らかにすることにより、汎用性をもつ非線形解析法を創出した。

研究成果の概要(英文)：This research has established the reconstruction formula, the existence theorem, and the identification theorem of an inverse problem of determining velocity field and diffusivity from tracer data. In connection with this inverse problem, the research has deduced a reconstruction formula of potential in an energy dependent inverse scattering, based on which it has established the existence theorem of the potential in the reflectionless scattering with one bound state. In addition, this research has studied an inverse problem to determine a nonlinearity of an differential equation from blow-up time of solutions to the equation to establish a global existence theorem for the inverse problem. A new general method on nonlinear analysis has been found by making mathematical structure of these inverse problems clear.

研究分野：数物系科学

キーワード：逆問題 微分方程式 非線形解析 エネルギー依存逆散乱 逆爆発問題

1. 研究開始当初の背景

逆問題の数理科学研究は、その応用的見地から、同定可能性(一意性)、再構成法(解の定め方)、安定性(解が観測データに含まれるノイズに対する鋭敏性)の手順で進められ、一般に、存在の問題(解が存在するための観測データの条件の決定)は、その難解さをも一因として、研究結果がスパースな状況にあった。しかしながら、自然に提出される逆問題の存在にまで踏み込んだ研究は非線形数学の新しい手法の豊富な土壌となることが認識されてくるに至って、これらの研究から骨太の数理構造に沿った新たな非線形解析法の創出されることが期待されていた。

2. 研究の目的

本研究課題の目的は、微分方程式の係数や非線形項を微分方程式の解の情報(観測データ)から定める逆問題の存在の問題、すなわち微分方程式の係数や非線形項から観測データへの対応の値域を決定する問題に取り組み、局所的な存在定理のみならず大域的な存在定理を確立することによって、汎用性をもつ非線形解析法を創出することにあった。

3. 研究の方法

(1) 逆問題の数理科学研究の1つの重要なモニュメントは、量子力学の逆散乱問題すなわち Heisenberg の散乱行列から場のポテンシャルを定める問題にある。研究代表者は相対論的逆散乱問題(エネルギー依存逆散乱問題)は、Liouville 変換を通してみると、海洋物理における移流拡散方程式の速度場と拡散係数をトレーサーデータから定める逆問題(移流拡散逆問題)と密接な関係にあることに注目し、この視点から、移流拡散逆問題の研究を進めた。この場合の拡散係数は渦拡散係数であり、分子拡散係数のような定数からの摂動ではなく、速度場と対等に大域的に扱うことに方針を置いている。また、本来のエネルギー依存逆散乱理論を、束縛状態をもつ場合にまで拡張することを研究開始時より常に意識して、研究を推進した。

(2) 逆問題の数理科学研究の別の重要なモニュメントは非線形振動の周期と振幅の関係から復元力を決定する問題に見ることができる。この問題は半世紀以上に亘る長い研究履歴の後に 2013 年に研究代表者らによって最終解答が与えられた(Kamimura and Kaneya, Global determination of a nonlinearity from a periodic motion, J. Mathematical Analysis and Applications, 403, 506-521)が、摩擦項に相当する非線形減衰項のある場合の研究は、Manosas and Torres (2005)を除けば、皆無であるため、系統的な研究結果、新手法の開発ならびに力学系研究への寄与を目的として、本研究課題の初年度に東京海洋大学大学院海洋科学技術研究科修士課程在籍の西村仁孝と共同研

究を開始した。

(3) Painleve 方程式が解の爆発の形態(Painleve 性)から導出されたことや微分方程式の解の評価が爆発解との比較により得られることに鑑みれば、非線形微分方程式にとって解の爆発に関する情報は微分方程式の非線形性の特徴付をなすものとみることが出来る。この考えを定量的な研究として具現するために、非線形微分方程式の解の爆発時間の情報から非線形項を定める逆問題(逆爆発問題)を研究対象とした。微分方程式や解の初期条件・境界条件には様々な選択があり得るが、先行研究が全くないことから、研究対象を岐阜大学工学部の宇佐美広介の定式化による初期値と爆発時刻の対応から自励系の推進項を定める問題に絞り、解の爆発時間の定量的データを実現する非線形項の存在定理を目指し、大域的な結果も視野に入れつつ、本研究課題初年度より宇佐美との共同研究を開始した。

4. 研究成果

(1) 移流拡散逆問題とエネルギー依存逆散乱問題との関係を、トレーサーデータと散乱データのパスを構築することによって明確にし、移流拡散方程式の拡散項と移流項(ともに深さの関数)をトレーサーデータから再構成するための復元公式を導出した(再構成法)。また、この復元公式をもとに、拡散項と移流項が存在するためのトレーサーデータの条件を決定した(存在定理)。さらに、トレーサーデータから拡散項と速度場が一意に定まるためには、速度場が深さ方向に一定ではないことが必要十分であることを証明した(一意性定理)。これらの研究成果は学会発表の項の、で成果発表を行った。なお、本研究課題は、その成果を単に専門家の範疇にとどめることなく、広く社会に発信することを目指していたため、これら移流拡散逆問題の成果は、図書の項に記載の一般向けの書物に盛り込んだ(同書の序文と第5章参照)。特に、移流拡散逆問題を逆問題の典型例として一般的な用語で取り上げた序文が 2017 年度慶應義塾大学総合政策学部入試問題(小論文)の資料として用いられたこと等から、移流拡散逆問題が逆問題の雛形として認知されたことが知見できる。

本来のエネルギー依存逆散乱理論を、束縛状態をもつ場合にまで拡張することについては、最終年度の直前に研究を開始し、次の結果を得た:無反射散乱行列(すなわち散乱行列の反射係数が零の行列)を実現するポテンシャルを表現する再構成公式を導出し、この公式を基に、束縛状態が1つ(すなわち透過係数の極が1つ)の場合のポテンシャルの存在定理を確立した。この結果は、学会発表の項の、で成果発表を行うとともに論文(単著、プレプリント 36 頁)にまとめ、数理物理専門誌に投稿(現在審査中)した。

この結果は、エネルギー依存方程式の等スペクトル流のソリトン研究に適用するに十分な汎用性を有しており、今後の非線形解析の先進的かつ包括的な基礎となることが期待できる。

(2) 非線形振動の周期と振幅の関係から非線形減衰項を定める問題について、西村仁孝と共同研究を行い、クーロン摩擦モデル方程式の一般形である速度互換型結合系の復元力の同定定理（非線形項の一意性）と再構成法を確立した。また、クーロン摩擦モデルが等時周期運動を実現する非線形項は線形のものに限ることを証明した。これらの結果は西村仁孝の修士学位論文「結合系の振動と非線形性」(2016年3月)に結実された。

(3) 逆爆発問題について、宇佐美広介と共同研究を行い、まず、典型的な非線形項をもつ微分方程式の解の爆発時刻に近い解の爆発時刻を実現する非線形項が元の典型的な非線形項の近傍に一意に存在することを証明するとともに、逆爆発問題は局所的にはWiener-Hopf 積分方程式の解の構造を受け継いだ数学構造を持つことを明らかにした。この研究成果は雑誌論文の に発表した。この成果で得られた局所解を、十分大きな初期値に対応する解として実現し、これらを左に（初期値を小さくする方向に）延長するためには、爆発時刻が初期値に Lipschitz 連続であることが十分であることを証明することにより、非線形項の大域的な存在定理を確立した。十分に一般的な仮定のもとに存在定理を確立したこの成果は、雑誌論文の に発表、かつ学会発表の項の 、 、 、 で成果発表され、国内外から高い評価を受けた。また、結果を整理して雑誌論文の を発表し、この問題が内包する数理構造を明らかにするとともに、論文 では、本研究課題の目的である汎用性をもつ非線形解析法創出の証左として、逆爆発問題に付随する未解決問題にも触れ、今後の研究指針を与えた。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計3件)

Yutaka Kamimura, Hiroyuki Usami, Existence and uniqueness of a nonlinear term realizing a prescribed blow up time, RIMS Kokyuroku Bessatsu, 査読有、B63、2017、127-149

Yutaka Kamimura, Hiroyuki Usami, An inverse blow-up problem, J. Differential Equations, 査読有、261、2016、6368-6410

Yutaka Kamimura, Hiroyuki Usami, Determination of a nonlinearity from blow-up time, Proc. Japan Acad. Ser. A, 査読有、90、2014、127-132

〔学会発表〕(計12件)

上村 豊, Energy dependent inverse scattering and exact solutions of an evolution system, RIMS 研究集会「偏微分方程式の逆問題とその周辺」(招待講演)、2017年1月25日、京都大学

上村 豊, エネルギー依存 Schrodinger 方程式による逆散乱法, 日本数学会 2016 年度秋季総合分科会, 2016年9月18日、関西大学

上村 豊, エネルギー依存逆散乱と破裂ソリトン, 第5回岐阜数理科学研究会(招待講演)、2016年8月8日、飛騨高山
Yutaka Kamimura, Nonlinear term realizing a prescribed blow-up time, A3 Joint Seminar on Inverse Problems (招待講演)、2016年3月12日、復旦大学、上海(中国)

Yutaka Kamimura, Energy dependent inverse scattering and its applications, Various problems in partial differential equations (招待講演)、2016年3月3日、日本大学

Yutaka Kamimura, Determination of a nonlinear term from blow-up time, RIMS 研究集会「偏微分方程式の逆問題とその応用の新展開」(招待講演)、2016年1月28日、京都大学

上村 豊, 宇佐美広介, 逆爆発問題の解の局所一意性, 日本数学会 2015 年度秋季総合分科会, 2015年9月13日、京都産業大学

Yutaka Kamimura, Can one determine nonlinearity of a model equation from blow-up time, Workshop on Delay Equation (招待講演)、2015年8月8日、東京大学

上村 豊, An inverse blow-up problem, RIMS 研究集会「保存則をもつ偏微分方程式に対する解の正則性・特異性の研究」(招待講演)、2015年6月4日、京都大学

Yutaka Kamimura, Mathematical analysis of some inverse problems through integral equations, 2014A3 Foresight Problem Conference on Modeling and Computation of Applied Inverse Problems (招待講演)、2014年11月22日、Jeju(韓国)

上村 豊, エネルギー依存逆散乱と移流拡散逆散乱, 微分方程式の展望(招待講演)、2014年10月18日、熊本大学

上村 豊, 宇佐美広介, 逆爆発問題の大域解, 日本数学会 2014 年度秋季総合分科会, 2014年9月25日、広島大学

〔図書〕(計1件)

上村 豊, 逆問題の考え方, 講談社ブルーバックス, 2014年12月、266頁

〔その他〕

ホームページ等

<http://olcr.kaiyodai.ac.jp/db/profile.php?yomi=KAMIMURA,%20Yutaka>

6．研究組織

(1)研究代表者

上村 豊 (KAMIMURA YUTAKA)

東京海洋大学・学術研究院・教授

研究者番号：50134854