

令和元年6月24日現在

機関番号：12701

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2014～2018

課題番号：26400160

研究課題名(和文) 非線形楕円型方程式の解の一意性および多重性についての研究

研究課題名(英文) Uniqueness and multiplicity of solutions of nonlinear elliptic problems

研究代表者

塩路 直樹 (SHIOJI, Naoki)

横浜国立大学・大学院工学研究院・教授

研究者番号：50215943

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,500,000円

研究成果の概要(和文)：一般化Pohozaev関数を用いて、Shioji-Watanabe (JDE 255(2013))で行った非線形楕円型方程式の正值球対称解の一意性の研究を発展させた。特に、2次元空間における楕円型方程式については、新しい一意性の十分条件を得て、これまで証明されていなかった2次元空間におけるHarau-Weissler方程式の正值解の一意性にも適用できることを示した。また、一意であることが示された球対称正值解の球対称な空間における非退化性が、一意であることを示す条件とそれほど変わらず得られることや、少し仮定を加えることで、球対称とは限らない空間における非退化性を示すなどの結果を得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義

微分方程式を用いてモデルを記述することが多い自然科学や工学において、考えている方程式に対し、解は存在するのか、存在する場合、解は一意的なのかあるいは多数存在するのかが重要な問題である。微分方程式論の研究において、解の存在と一意性・多重性は幅広く研究されており、研究成果は微分方程式論の発展のために寄与するものである。

研究成果の概要(英文)：Using a generalized Pohozaev function, we extend the uniqueness result of positive radial solutions of elliptic equations obtained by Shioji-Watanabe (JDE 255 (2013)). In particular, for an elliptic problem in two dimensional space, we obtained a new uniqueness result, and we show that we can apply it to the Harau-Weissler equation in two dimensional space. Moreover, for some elliptic problems, we study the nondegeneracy of the unique positive radial solution in a radial function space under almost same assumptions for the uniqueness. We also study its nondegeneracy even in a space which is not restricted to be radial.

研究分野：非線形関数解析学

キーワード：一意性 正值球対称解 非退化性 Pohozaev関数

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

楕円型方程式の正值球対称解の一意性についてはいくつかの結果が知られていた。Shioji-Watanabe, Jour. Diff. Eq. 255(2013)の結果により、方程式の形はある程度限定はされるが、これまで個別に一意性が証明されていた様々な問題に対し、統一的に一意性が証明できることを示していた。しかし、2次元空間における楕円型方程式については、それまでに証明されている結果をカバーしきれていなかった。また、一意であることを示した正值球対称解が、球対称な関数空間において非退化であることや、球対称と限定しない関数空間で非退化であることについては、研究できていなかった。

分数べきラプラシアンを含む楕円型方程式に対し、変分法を用いた解の存在についての結果は色々出ていたが、分数べきラプラシアンの他にさらに臨界指数を含む場合については、あまり結果がなかった。 $p > 2$ の場合の球面上の曲線の曲率の絶対値の p 乗の積分の第一変分公式は考えられていたが、測地線以外の第一変分公式を満たす解は分かっていなかった。そのようなことは、Arroyo-Garay-Mencia (J. Geom. Phys. 48(2003))によって議論されていたが、彼らは C^4 クラスの関数を対象として議論していたのだが、 C^4 クラスの曲線なら、曲率の2階微分が問題なく計算できるからである。形式的な計算により、第一変分公式には曲率の2階微分が入ってくるので、当然と言えば当然の仮定を行っていた。そのため、彼らは、定常状態にある C^4 クラスの解は測地線しかないことを示していた。

2. 研究の目的

次のようなことが研究目的である。

- (I) 楕円型方程式の正值球対称解の一意性を示す問題に対し、ある程度方程式の形を限定して、正值球対称解の一意性を示す結果を得ていたが、その結果を拡張し、より広い範囲の楕円型方程式の正值球対称解の一意性を示す。また、一意であることを示した正值球対称解の球対称な空間における非退化性や球対称とは限らない空間における非退化性を示すことにより、楕円型方程式の正值球対称解の構造を解明することに寄与する。
- (II) 分数べきラプラシアンと対応する臨界指数の非線形項を持つ楕円型方程式の正值解の存在を研究し、そのような楕円型方程式の解構造を明らかにすることに寄与する。
- (III) 球面上の曲線の曲率の絶対値の $p (> 2)$ 乗の積分の第一変分公式を提唱することにより今まで考えられていなかった問題を提起し、弾性曲線の分野の発展に寄与する。

3. 研究の方法

研究方法は、次のようなことの積み重ねである。

- (i) 設定した問題に対して、解決に至る道筋を考え、その道筋に沿って証明できないかを何度もトライしてみる。解けない場合は、違う道筋も考える。
- (ii) 道筋が正しいかどうかについて、可能であれば、数式処理ソフトを用いた実験を行う。
- (iii) 共同研究者と、お互い考えたことを基にしてディスカッションする。
- (iv) 大抵の場合そう簡単には解決しないので、並行して関連する論文や本を読み知識を補う。
- (v) 自分で論文や本を読むだけだと得られる情報量が限られるので、勉強会や研究会に出席し様々な知識を吸収するように努める。
- (vi) 関連する研究を行っている研究者に講演を依頼し、専門的知識の提供を受ける。
- (vii) 研究成果を論文にまとめる。国内外で研究成果の発表を行い、同時に情報収集に努める。
- (viii) (i)-(vii)を通して新たな問題を発見する。問題が解けない場合は問題設定の変更も試みる。

4. 研究成果

楕円型方程式の正值球対称解の一意性についての研究を行った。非線形項は限定されてしまうが Pohozaev 関数を使って正值球対称解の一意性についての結果は得ていた。しかし、次元が2の場合は、調和ポテンシャルを持つ非線形シュレディンガー方程式については、これまでに得られていた一意性の結果を完全にはカバーできていなかった。それをカバーできるように定理を拡張し、これまで得られていなかった次元が2の場合の Haraux-Weissler 方程式の正值解の一意性にも適用できることを示した。また、一般化 Pohozaev 関数を用いて正值球対称解が一意に存在することを示すことができる楕円型方程式に対し、正值球対称解の一意性を示すための条件とほぼ同等な条件の下で、その一意正值解の球対称に限定した関数空間における非退化性を示した。条件を少しつけなければならないが、球対称とは限

らない関数空間における非退化性について議論した。それらの結果を松隈方程式、調和ポテンシャルを持つ非線形シュレディンガー方程式、球面のキャップ上の Brezis-Nirenberg 問題などの様々な方程式に応用できることを示した。さらに、 n 次元双曲空間における Brezis-Nirenberg 問題の正值球対称解の一意性についての研究を行った。適当な変換を用いて、 n 次元ユークリッド空間の単位球における問題に直し、JDE 255 において発表した論文で導入した Pohozaev 関数を用いることができるようにした。しかし、Pohozaev 関数の係数を与える関数が単位球の境界で発散するため、JDE 255 の論文の仮定をそのままの形で用いることはできないが、証明を工夫することにより正值解の一意性の結果を示した。得られた結果は、2 次元双曲空間において、Mancini-Sandeep(ASNSP, vol.7) の結果を拡張している。幅が狭い球面上の測地距離による円環領域において、Brezis-Nirenberg 問題を考え、正值球対称解からの分岐問題を考えた。球面上の測地距離による円環領域においては、正值球対称解の一意性は一般的には成り立たないが、幅が狭い場合は正值解の一意性が得られることを示した。その際に、一般化 Pohozaev 関数を用いる方法によったが、以前の研究とは違い、Pohozaev 関数の微分において、関数の 2 乗の項を残すのではなく $p+1$ 乗の項を残すようにした変形した Pohozaev 関数を用いた。その上で、球対称な関数空間での正值球対称解の非退化性を導き、正值球対称解から球対称ではない正值解が分岐する結果を得た。また、先行研究では加藤の補題を用いている部分を、陰関数定理からその関数の微分可能性が得られることを示し、議論を明瞭にした。さらに、球面上の測地距離による球領域において、非協力的な楕円型方程式のシステムを考え、ある固有値に対応する自明解からの非自明な解の分岐について議論した。考えている問題は変分構造を持ち、汎関数は n 次元特殊直交群に対して不変なため、問題は n 次元特殊直交群に対して同変になる。各固有値に対応する有限次元固有空間は n 次元特殊直交群の表現になることを用い、同変写像度の理論を用いることで、ある固有値に対応する自明解からの非有界な非自明解の分岐や、他の固有値に対応する自明解とをつなぐ非自明解の分岐などの結果を得た。分数べきラプラシアンとその臨界指数を含む楕円型方程式について、アニュラスの外径と内径の比がすごく大きいような感じの領域において、正值解が存在することを示した。分数べきラプラシアンについては、通常のラプラシアンの場合のグローバルコンパクトネスの結果はまだ得られていないが、符号変化が出てこないレベルに汎関数の値を制限することにより、グローバルコンパクトネスが成り立つことを示した。また、極限方程式の正值解のエネルギーの 2 倍より小さいエネルギーを持つテスト関数を作らなければならないが、Talenti 関数を修正することにより、それを行った。テスト関数を作る際は、領域をいくつかの部分に分解し、問題に対応する汎関数の値の適正な評価が得られるように工夫する必要がある。分数べきラプラシアンとその臨界指数を含む楕円型方程式は、星形領域においては非自明解を持たないことが知られているため、領域に何らかの仮定を加えないと正值解は存在しない。上で述べたアニュラスの外径と内径の比がすごく大きいような感じの領域というのは、領域のトポロジーが非自明であるが、例え領域のトポロジーが自明であっても正值解が存在し得ることを示した。やはりテスト関数を工夫して作る必要がある。特に 2 次元空間の領域においては、分数べきラプラシアンの指数に制限をつけなければならないことを示した。

$p > 2$ とし、球面上の曲線の曲率の絶対値の p 乗の積分の第一変分公式を導出した。その上で、flat core 解という奇妙な解が存在することを示した。平面上では、渡辺宏太郎氏が Kodai Math. J. 37 で示していたものである。第一変分公式で得られるものは、曲率が満たすべき方程式であるため、曲率がそのような球面上の曲線を実現することとは隔たりがあるが、flat core 解については容易に実現できることを示した。また、パラメータを変えると、解の形状が変化することなど、球面上の p -弾性曲線のついての性質をいくつか明らかにした。球面上の曲線の曲率の絶対値の p 乗プラス定数の積分値を汎関数として、その第一変分公式を満たす曲線の候補となる微分方程式の性質を詳しく調べた。具体的には、その微分方程式の解が、flat core 解という奇妙な球面上の曲線に対応する場合である。その微分方程式が原点で局所リプシッツではなくなるためために flat core 解が生じるのだが、局所リプシッツ性でないがゆえに、解の性質を調べる際に慎重な議論を行った。

5 . 主な発表論文等

[雑誌論文] (計 5 件)

- [1] N. Shioji, K. Watanabe, Total p -powered curvature of closed curves and flat-core closed p -curves in $S^2(G)$, Comm. Anal. Geom., (掲載予定). (査読有)
- [2] S. Rybicki, N. Shioji, P. Stefaniak, Rabinowitz alternative for non-cooperative elliptic systems

on geodesic balls, Adv. Nonlinear Stud. 18 (2018), 845–862, (査読有),

<https://www.degruyter.com/view/j/ans.2018.18.issue-4/issue-files/ans.2018.18.issue-4.xml>

- [3] N. Shioji, K. Watanabe, Uniqueness and nondegeneracy of positive radial solutions of $\operatorname{div}(\rho \nabla u) + \rho(-gu + hu^p) = 0$, Calc. Var. Partial Differential Equations 55 (2016), Article No. 32 (42 ページ). (査読有), DOI: 10.1007/s00526-016-0970-2
- [4] N. Shioji, K. Watanabe, Uniqueness of positive solutions of Brezis-Nirenberg problems on \mathbb{H}^n , Linear Nonlinear Anal. 1 (2015) 261–270. (査読有), <http://www.ybook.co.jp/online2/oplna/vol1/p261.html>
- [5] S. Mosconi, N. Shioji, M. Squassina, Nonlocal problems at critical growth in contractible domains, Asymptot. Anal. 95 (2015) 79–100. (査読有), DOI: 10.3233/ASY-151324
- [6] S. Secchi, N. Shioji, M. Squassina, Coron problem for fractional equations, Differential Integral Equations 28 (2015) 103–118. (査読有), <https://projecteuclid.org/euclid.die/1418310423>

〔学会発表〕(計 16 件)

- [1] N. Shioji, Uniqueness of a Positive Radial Solutions of Some Elliptic Problems and Its Nondegeneracy, The 10th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, 2014.7.7 ~ 2014.7.11, マドリッド (スペイン).
- [2] N. Shioji, Uniqueness of positive radial solution of an elliptic problems and its nondegeneracy, Seoul ICM 2014 Satellite Conference on Variational Methods for Nonlinear Elliptic PDEs, 2014.8.4 ~ 2014.8.8, 大田 (大韓民国), (招待講演).
- [3] 塩路直樹, 一般化 Pohozaev 関数と楕円型方程式の正値球対称解の一意性について, 2014.9.25 ~ 2014.9.28, 2014 年度日本数学会秋季総合分科会, 函数方程式論分科会, 広島大学, (特別講演).
- [4] 渡辺宏太郎・塩路直樹, 2次元球面上の L^p 弾性曲線と flat-core 解の存在について, RIMS 研究集会実領域における常微分方程式の定性的理論とその応用, 2014.11.4 ~ 2014.11.6, 京都大学.
- [5] N. Shioji, A critical problem for the fractional Laplacian, 常微分方程式ワークショップ松山 2015, 2015.3.10, 愛媛大学.
- [6] 渡辺宏太郎・塩路直樹, 2次元球面上の L^p 弾性曲線と flat-core 解の存在について, 日本数学会 2015 年度年会, 函数方程式論分科会, 2015.3.21 ~ 2015.3.24, 明治大学.
- [7] N. Shioji, A critical problem for fractional Laplacian in contractible domains, Equadiff 2015, 2015.7.6 ~ 2015.7.10, リヨン (フランス).
- [8] N. Shioji, On a Kirchhoff type problems with critical exponents, VII symposium on Nonlinear Analysis, 2015.9.14 ~ 2015.9.18, トルン (ポーランド).
- [9] 塩路直樹, On a Kirchhoff type problems with critical exponents, 第 10 回非線形偏微分方程式と変分問題, 2016.2.6 ~ 2016.2.7, 首都大学東京.
- [10] 渡辺宏太郎・塩路直樹, n 次元双曲空間上の Brezis-Nirenberg 問題の正値解の一意性について, 日本数学会 2016 年度年会, 函数方程式論分科会, 2016.3.16 ~ 2016.3.19, 筑波大学.
- [11] N. Shioji, Uniqueness of positive solutions of Brezis-Nirenberg problem on the hyperbolic space, The 11th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, 2016.7.1 ~ 2016.7.5, オランダ (アメリカ合衆国).
- [12] N. Shioji, Total p -powerd curvature of closed cureves in $S^2(\mathbb{G})$, International Conference on Topological Nonlinear Analysis, 2017.6.12 ~ 2017.6.16, 広州 (中華人民共和国).
- [13] N. Shioji, Uniqueness of positive solutions of the Brezis-Nirenberg problem in thin spherical annular domains and its application, International Conference on Nonlinear Analysis, PDEs and Applications, 2017.9.22 ~ 2017.9.24, 済州 (大韓民国).
- [14] N. Shioji, Total p -powerd curvature of closed cureves in $S^2(\mathbb{G})$, 第 35 回九州における偏微分方程式研究集会, 2018.1.29 ~ 2018.1.31, 九州大学.
- [15] N. Shioji, Total p -powerd curvature of closed cureves in $S^2(\mathbb{G})$, The 12th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, 2018.7.5 ~ 2018.7.9, 台北 (台湾).
- [16] N. Shioji, Uniqueness of positive solutions of the Brezis-Nirenberg problem in thin spherical annular domains and its application, The 12th AIMS Conference on Dynamical Systems, Dif-

ferential Equations and Applications, 2018.7.5 ~ 2018.7.9, 台北 (台湾).

6 . 研究組織

(2) 研究協力者

研究協力者氏名：渡辺宏太郎

ローマ字氏名：(WATANABE, Kohtaro)

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。