

令和元年6月5日現在

機関番号：14701

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2014～2018

課題番号：26400162

研究課題名(和文)非線形発展方程式と準変分解析

研究課題名(英文)Nonlinear Evolution Equations and Quasi-Variational Analysis

研究代表者

久保 雅弘(Kubo, Masahiro)

和歌山大学・システム工学部・教授

研究者番号：80205129

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,500,000円

研究成果の概要(和文)：研究代表者提唱の「準変分解析」の枠組みで、楕円型問題と放物型問題について変分不等式と準変分不等式に適用可能な抽象的理論の研究を行い、解の存在について一般的な定理を証明し、具体的問題に応用した。

楕円型準変分解析問題では、従来、汎関数の主部に狭義凸性を仮定していたが、本研究においては凸性のみを課すことで解の存在を証明することができた。

放物型準変分解析問題に関しては、時間依存劣微分発展方程式の理論と手法、特にエネルギー不等式の方法を効果的に適用した。局所解を大域解に延長する際に生じる繊細な困難を、汎関数の準変分性に関する定義域の条件に、時間に関して右半連続性という微妙な条件を課すことで克服した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

非線形発展方程式論は、吉田耕作の線形半群理論、高村幸男の非線形半群理論に淵源を持ち、加藤敏夫など日本人研究者によって創始・発展させられてきた数学解析における重要な分野である。

本研究では、物理や工学上広い応用を持つ変分不等式への豊かな応用可能性を有する時間依存劣微分発展方程式の理論と方法を一步前進させることにより、放物型準変分不等式の抽象的理論を構築することに成功した。

また、対応する定常問題に関しても、楕円型準変分不等式の抽象的理論を従来より応用可能性を広げる形で再構築した。これにより、従来よりも広いクラスの変分不等式・準変分不等式の研究が可能になり、物理学や工学上の問題への応用可能性が広がった。

研究成果の概要(英文)：We proved abstract existence theorems for elliptic variational and quasi-variational inequalities as well as parabolic ones within the framework of Quasi-Variational Analysis that had been proposed by us.

For elliptic problems, we assume convexity for the principal part of the functional instead of strict convexity which had been needed before this research.

As for parabolic problems, we employed the theory and method of time-dependent subdifferential evolution equations in the main step of the proof. Moreover, we recognized the importance of assuming right continuity for the elements of the domain concerning the quasi-variationality of the functional in order to overcome a subtle difficulty arising in prolonging the local solution to a global one.

研究分野：非線形解析学

キーワード：非線形解析 準変分解析 非線形発展方程式 非線形偏微分方程式 変分不等式 準変分不等式 関数方程式

1. 研究開始当初の背景

(1) 変分解析は数理モデル解析の伝統的な方法論として確立されており、物理学や工学などの幅広い分野に数学解析を応用する手段として重要な役割を果たしてきている。その基本的な考え方は、汎関数の極値(最小値)を見つけることによって、解の存在を確立するということである。研究代表者は、本研究開始の数年前から、非線形解析の新しい枠組みとして「準変分解析」という考え方を提唱し、変分解析と不動点解析を融合して数理モデルの解析、特に変分不等式と準変分不等式問題の解析を統一的に理解しようとしていた。準変分解析の諸問題の内、楕円型準変分不等式の解の存在定理においては、汎関数の主部に狭義凸性の条件を課していた。そこで、物理学や工学への応用範囲を広げるために、この狭義凸性の条件を緩和することが課題としてあった。

(2) 準変分解析の問題の内、放物型準変分不等式の問題については、従来、変分構造を持つ場合(空間微分作用素が Euler-Lagrange 型の放物型偏微分方程式に関する問題)が考えられていた。しかし、物理学や工学上の問題には、この範疇に入らないものがあるため、より広いクラスの偏微分方程式に関する準変分不等式問題を扱うことができる理論が要請されていた。これは非線形発展方程式の新しい枠組みを構築することにもつながり、吉田耕作の線形半群理論、高村幸男の非線形半群理論、加藤敏夫の線形及び非線形発展方程式論等、我が国で創始発展させられてきた発展方程式論の分野への貢献になることを研究代表者は構想していた。

2. 研究の目的

(1) 汎関数の主部(最高階の微分に関する部分)に(狭義凸ではなく)凸性のみを課する条件下での楕円型準変分不等式問題の解の存在定理を抽象論として確立すること。そして、従来よりも広いクラスの具体的な楕円型準変分不等式問題へ応用すること。

(2) 空間微分作用素部分が必ずしも Euler-Lagrange 型ではない放物型偏微分方程式に関する準変分不等式に応用可能な抽象的非線形発展方程式の理論を構築すること。そして、その理論を従来よりも広いクラスの偏微分方程式に関する準変分不等式問題に応用する。特に、解の存在を確立する。

3. 研究の方法

(1) 不動点解析を用いて解の存在を証明するという従来からの基本的な考え方は踏襲する。その際に、狭義凸性を仮定しないと、不動点定理を適用する写像(解写像)が一般には多価になることが主たる困難である。そこで、用いる不動点定理を多価写像にも適用可能なものにし、関連する条件を整備することによって、狭義凸性を仮定しない汎関数の問題に解の存在が証明できるようにする。

(2) 研究代表者はこれまでの研究の中で、時間依存劣微分発展方程式のエネルギー不等式の理

論的役割(解の存在のための必要十分条件)を明らかにし、さらに様々な数理モデルの解析に応用してきた。特に非 Euler-Lagrange 型の空間微分作用素に関する問題について、エネルギー不等式を効果的に適用して、解の存在を証明してきた。本研究では、制約条件が解に依存する準変分不等式を扱えるようにするために、エネルギー不等式の方法を微分作用素だけでなく制約条件にも同時に適用することによって、従来よりも広いクラスの偏微分方程式に関する準変分不等式を扱えるようにする。

4. 研究成果

(1) 汎関数の主要部に狭義凸性ではなく凸性のみを仮定した楕円型準変分不等式問題の解の存在定理を証明することに成功し、具体的問題への応用を与えた。狭義凸性を仮定しないと、解の存在を不動点定理によって証明する際に、不動点定理を適用する写像(解写像)が一価でなくなる。従来は狭義凸性を仮定して、この写像を一価になるように定義し、Schauder の不動点定理を適用して不動点(もとの問題の解)の証明を得ていた。本研究では、単なる凸性の仮定の下で、一般には多価写像になる解写像に対して角谷の不動点定理を適用することに成功し、不動点(即ちもとの問題の解)の存在を証明することができた。得られた抽象的結果を具体的な楕円型準変分不等式問題に応用して、解の存在を証明した。

(2) 空間微分作用素が必ずしも Euler-Lagrange 型ではない放物型偏微分方程式に関する準変分不等式に応用可能な抽象的非線形発展方程式の枠組みを構築することに成功した。強解(時間強微分を持つ解)の存在を一般的に証明し、具体的な準変分不等式問題への応用を与えた。証明の大きなステップでは時間依存劣微分発展方程式のエネルギー不等式を効果的に適用することにより、制約条件が解に依存することと、空間微分作用素が必ずしも Euler-Lagrange 型ではないこととの両方の困難を克服することができた。さらに、証明を進める中で、今回の問題では時間局所解を時間大域解に延長する際に非常に精密な議論をする必要があることが明らかになり、この点を解決するために、汎関数の準変分性に関する定義域に関して、右半連続性という微妙な条件を課すことが、証明の遂行と応用可能性の確保の双方の観点から適切であることが分かった。本研究を完成するためにはこの条件とその適用方法を確立することが一番の難所であった。確立された抽象論によって、変分不等式と準変分不等式に関して、従来よりも大きなクラスの問題について、時間強微分を有する解の存在を証明できるようになり、数理モデル解析の視野を広げることになった。応用としては、非 Euler-Lagrange 型の空間微分作用素を持つ非線形放物型偏微分方程式(単独およびシステム)に関する変分不等式と準変分不等式の解の存在を与えた。

5. 主な発表論文等

[雑誌論文](計3件)

Masahiro Kubo and Noriaki Yamazaki, Global strong solutions to abstract quasi-variational evolution equations, Journal of Differential Equations 265(9) pp.4158-4180 (2018年11月)(査読有)

Masahiro Kubo, Quasi-variational analysis, Sugaku Expositions 30(1) pp.17-34

(2017年6月) (査読有)

Masahiro Kubo and Yusuke Murase, Quasi-subdifferential operator approach to elliptic variational and quasi-variational inequalities, Mathematical Methods in the Applied

Sciences 39(18) pp.5626-5635 (2016年12月) (査読有)

[学会発表] (計0件)

[図書] (計0件)

[産業財産権]

出願状況 (計0件)

取得状況 (計0件)

[その他] なし

6. 研究組織

研究代表者のみ