2版

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ３０ 年　 ６ 月 １２ 日現在

機関番号：１４４０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2014～2017
課題番号：２６４００１６７

研究課題名（和文）双曲型作用素の主表象のスペクトル及びハミルトン流の構造と強Gevrey双曲型指数

研究課題名（英文）Gevrey strong hyperbolicity and the structure of Hamilton map and flow

研究代表者
西谷　達雄（Nishitani, Tatsuo）

大阪大学・その他部局等・名誉教授

研究者番号：８０１２７１１７

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,700,000円

研究成果の概要（和文）：m 次特性点をもつ線形双曲型微分作用素の強 Gevrey 双曲型指数について，いくつかの基本的な結果を得ることができた．特に m 次斉次の双曲型作用素 p に対し，その m 次特性集合が多様体で，かつそれに沿う局所化が余接空間上で狭義双曲型多項式であり，その伝播錐が特性多様体に横断的ならば，p に対する初期値問題はすべての低階に対して Gevrey m/(m-2) クラスで適切であることを示した．

研究成果の概要（英文）：Several fundamental results on the strong Gevrey hyperbolicity index have been obtained. In particular, for homogeneous hyperbolic differential operators of order m of which characteristic set is a smooth manifold, the Cauchy problem is Gevrey m/(m-2) well posed for any lower order term if the localization is strictly hyperbolic polynomial on the conormal space and the propagation cone is transverse to the characteristic manifold.

研究分野：偏微分方程式

キーワード：Gevrey 強双曲性指数　初期値問題　Gevrey クラス　適切性　伝播錐　横断的　余接空間

１．研究開始当初の背景

線形偏微分作用素に対し初期値問題を考える．初期値問題が滑らかな関数空間で低階の如何によらず適切となるときこの作用素を強双曲型作用素とよぶ．この強双曲型作用素の特徴付けは 1970 年代の Ivrii-Petkov の研究に始まり，そこで初めて Hamilton 写像という重要な概念が導入され，強双曲型作用素であるには Hamilton 写像が非零の実固有値をもつことの必要性が示された．1980 年代前半にこの条件が十分条件であることが Ivrii，岩崎，研究代表者らによって証明された．

一方初期値問題を Gevrey クラスという滑らかな関数空間よりは狭い空間（実解析的関数空間よりは広い）で考察するとき 1980 年代前半に Bronshtein によって m 階の微分作用素に対する初期値問題は低階の如何によらず Gevrey クラス m/(m-1) で適切となることが示された．Gevrey クラスは実数 s>1 で段階づけられているので初期値問題が Gevrey s クラスで低階の如何によらず適切となる微分作用素の特徴付けが自然な問題となる．

２．研究の目的

p を m 階の微分作用素とするとき，滑らかな関数空間における強双曲型作用素の定義に倣って強 Gevrey 双曲型作用素の考え方が自然に導入される．すなわち p が強 Gevrey s 双曲型であるとは，任意の m-1 階以下の微分作用素 Q に対して p+Q に対する初期値問題が Gevrey s クラスで適切となることとする．また p が強 Gevrey s 双曲型となる最大の s を p の強 Gevrey 双曲型指数と呼ぶことにする．1<s を指定して強 Gevrey s 双曲型となる作用素を決定するのが最終目標である．一般の双曲型作用素は i 次の特性点をもつ i 階の微分作用素の積に分解されるので（超局所的には）m 次の特性点をもつ m 階の微分作用素を対象にし，そのなかで強 Gevrey s 双曲型となる作用素を決定することを目的とした．また一階の微分作用素系に対しては，特性点の次数よりもむしろその特性点における表象の Jordan 構造のほうがより強 Gevrey 双曲型指数に関係すると考えられるので，この関係を調べることも目的の一つとした．

３．研究の方法

1977 年に Ivrii が m 次特性点をもつ m 階単独微分作用素 p と m-1 階の微分作用素 Q に対して，p+Q に対する初期値問題が Gevrey s クラスで適切となるためには s と m の関係によっては Q がある条件を満たさなければならないことを示している．この結果から任意の m-1 階微分作用素 Q に対し p+Q に対する初期値問題が Gevrey s クラスで適切となるには s が m/(m-2) 以下であることが導かれる．従って p が m 次特性点をもつ場合には p の強 Gevrey 双曲型指数は m/(m-2)以下である．他方 Bronshtein の結果によれば任意の低階に対して初期値問題が Gevrey m/(m-1) クラスで適切となるので，p の強 Gevrey 双曲型指数は m/(m-1) 以上である．以上の考察から，強 Gevrey 双曲型指数が丁度 m/(m-2) と m/(m-1) となる微分作用素を決定することを中心に研究することとした．m=2 のときは m/(m-2) は無限大となり，これは 2 階の実効的微分作用素に対応していると考えられるので，強 Gevrey 双曲型指数=m/(m-2) のときの研究には実効的微分作用素の研究に際して培ってきた手法，すなわち，超局所的時間関数を荷重関数とする擬微分作用素を荷重とするエネルギー評価式を導くことを基本とした．一階の微分方程式系に対しては初期値問題の適切性の Gevrey 指数と特性点における表象の Jordan 構造を一般的に扱った研究は全くないので（特性点の多重度一定を仮定した特殊な場合を除くと）まず表象の Jordan 構造と適切性の Gevrey 指数を関連づける結果を得ることを出発点とした．このために系を系のままで扱う方法として対称化の方法を探索することとした．系の対称化の研究のために年一回研究代表者がイタリアのピサ大学を訪れ，Pisa 大学の F.Colombini および Michigan 大学の J.Rauch と共同研究を行った．

４．研究成果

J.Rauch および F.Colombini と共同で一階の微分方程式系に対する初期値問題の Gevrey クラスでの適切性を研究し，常微分方程式における Lyapunov 関数の具体的な構成にヒントを得て系の symmetrizer を構成して初期値問題の Gevrey 適切性を証明する，という新しい手法で Bronshtein の結果を再証明することに成功した．この証明は従来のように問題を単独の方程式に帰着させる，という方法とは全く異なる．この証明により，適切性の Gevrey 指数を系の Jordan 構造に関係づけることがでた．この結果は適切性の Gevrey 指数を系の固有値の最大重複度にはよらない系の特性点での Jordan block の最大次数によって評価するものとなっている．またこの手法により係数が時間に関して Lipshitz 連続な一様対角化可能な系に対し，初期値問題が低階によらず Gevrey 2 クラスで適切であることの証明が可能となった．これは 1986 年の梶谷の結果を大幅に改良するものとなっている．さらに同じ手法により係数行列が Holder 連続のときも Holder 連続指数に対応する Gevrey クラスでの適切性の証明に成功した．多羅間（1977）の提出した例によればこの結果は最良であることが分かる．

これらの結果は論文として Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, vol. XIX, 2019 での掲載が確定している．

またこの証明法は初期値問題を差分化した問題にも適用可能であり，現在 J.Rauch と共同で Leap-frog 法で差分化した初期値問題の

差分解の安定性の証明を遂行中である．

一般の m 階単独微分作用素に対し，m 次特性集合は滑らかな多様体であると仮定し，この微分作用素の特性多様体上での局所化を考える．局所化とは主表象を特性点の周りで Taylor 展開したときの最初の非自明項であり．特性多様体の接空間上での双曲型多項式となる．この局所化の双曲錐，すなわち作用素に内在するすべての時間方向を含む最大の錐の symplectic 形式に関する双対錐を考える．この錐は伝播錐と呼ばれ，特性点を極限点とするすべての陪特性帯を含む最小の錐である．m=2 のときはこの伝播錐と特性多様体が横断的に交わることが作用素が実効的双曲型となるための必要充分条件である(1986,研究代表者)．

そこで一般の m 階の微分作用素に対しても伝播錐と特性多様体が横断的でかつ局所化が特性多様体の接空間による商空間，すなわち余接空間上で狭義双曲型多項式となる場合を研究した．この場合，局所化はある定数係数狭義双曲型多項式の，特性多様体の定義関数の微分による引戻しになっている．まず時間の双対変数によらない関数でその零超曲面が特性多様体を含み，かつその接超平面が伝播錐と横断的なものが存在することを示した．つぎにこの関数の指数関数を表象とする擬微分作用素（実際には複素数値相関数をもつ Fourier 積分作用素）に対し，Gevrey 空間での Calculus, とくに m 階微分作用素との合成公式を整備した．この Calculus を利用して Gevrey 荷重付きエネルギー不等式の導出に成功し，これを用いて初期値問題が Gevrey m/(m-2) クラスで適切であることの証明に成功した．この結果は強 Gevrey 双曲型の研究における最初の基本結果であると考えられる．この結果を 2016 年 4 月にイタリアの Pisa 大学に招待された際に Pisa 大学の PDE セミナーで発表した. また結果は Osaka Journal of Math.vol.54,2017 に掲載された．

前掲の結果発表の際にセミナーに同席していた G.Metivier と，一般の mxm 一階微分方程式系に対して，その表象の特性多項式が前掲の m 階単独微分作用素と同じ仮定を満たす場合の初期値問題の適切性に関する共同研究を始めた．系の固有値がすべて半単純と仮定すると特性多様体上で系の局所化が系の表象の核から核への写像として定義される．この局所化系が特性多様体の余接空間上で狭義双曲系となり，また m 次特性集合が包合的な多様体である場合に系に対する初期値問題が L^2 適切であることを Metivier との共同研究で示した．従ってこの系は強双曲系となる．m 階の単独微分作用素の場合には m が 3 以上ならこの作用素は決して強双曲型ではあり得ないので（Ivrii-Petkov）これは系に特有な現象である．この結果は Kyoto Journal of Math. Vol. 58，2018 に掲載が決定している．

2016 年 4 月および 2017 年 5 月にそれぞれ 2 週間イタリアのピサ大学を訪れ，F.Colombini，J.Rauch と共同で Bronshtein の定理の symmetrizer による取り扱い，および 2 階 2 独立変数の双曲型作用素に対する初期値問題の Gevrey 空間での適切性について共同研究を行った．その成果として係数が時間のみに依存する場合に Colombini 達(1983) により得られていた係数の Holder 連続指数と Gevrey 適切性指数との関係を，係数が時間と空間の関数の積の場合にまで拡張することに成功した．この結果は 2017 年 11 月にピサで開催された国際研究集集会「Simposito di Annalisi Matematica in occasione dei 70 anni di Ferruccio Colombini」で発表した．

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 9 件）

① G.Metivier and T.Nishitani. Note on strongly hyperbolic systems with involutive characteristics, Kyoto J. Math. 査読有, vol. 58, 2018.

② T.Nishitani, On the Cauchy problem for differential operators with double characteristics, A transition from noneffective to effective characteristics, Publ. RIMS Kyoto Univ. 査読有，vol. 54, 2018, 317-349.

③ F.Colombini, T.Nishitani and J.Rauch, Weakly hyperbolic systems by symmetrization, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 査読有，vol. XIX, 2019.

④ T.Nishitani, On the Gevrey strong hyperbolicity, Osaka J. Math. 査読有，vol. 54, 2017, 383-408.

⑤ T.Nishitani, A simple proof of existence of tangent bicharacteristics for noneffectively hyperbolic operators, Kyoto J. Math. 査読有，vol. 55, 2015, 281-297.

⑥ E.Bernardi and T.Nishitani, Counter examples to $C^{¥infty}$ well posedness for some hyperbolic operators with triple characteristics, Proc. Japan Acad. Ser A, 査読有，vol. 91, 2015, 19-24.

⑦ T.Nishitani and K.Yagdjian, Parametric resonance in wave map, Funkcialaj Ekvacioj, 査読有，vol. 57, 2014, 351-374.

⑧ T.Nishitani, Local and microlocal Cauchy problem for non-effectively hyperbolic operators, J. Hyperbolic

Differ. Equ. 査読有, vol. 11, 2014, 185-213.

⑨ <u>西谷達雄</u>, 二次特性的双曲型偏微分方程式の初期値問題の適切性, 数学, 査読有, 66 巻, 2014, 366-391.

〔学会発表〕(計 5 件)

① <u>T.Nishitani</u>, On the Cauchy problem for $D_t^2-b(t)D_xa(x)D_x$, Simposito di Annalisi Matematica in occasione dei 70 anni di Ferruccio Colombini, 2017/11/30～12/02, ピサ, イタリア.

② <u>T.Nishitani</u>, On the Gevrey strong hyperbolicity, Seminaire sur equations hyperboliques et physique mathematique, 2015/06/02 ～ 06/04, IHP 研究所, パリ, フランス.

③ <u>T.Nishitani</u>, On the Gevrey strong hyperbolicity, Seminar on PED, University of Pisa, 2016/04/14, ピサ, イタリア.

④ <u>西谷達雄</u>, On the Gevrey strong hyperbolicity, 第 22 回超局所解析と古典解析, 2015/12/05, 富山県民会館.

⑤ <u>T.Nishitani</u>, Weyl-Hormander calculus in the Gevrey classes, Global Properties of PDE's on Manifolds, 2014/09/17～09/19, Cagliari, イタリア.

〔図書〕(計 3 件)

① <u>T.Nishitani</u>, Cauchy problem for differential operators with double characteristics, Springer, 211pp, 2017.

② <u>西谷達雄</u>, 線形双曲型偏微分方程式, 朝倉書店, 286 頁, 2015.

③ <u>T.Nishitani</u>, Hyperbolic systems with analytic coefficients, Springer, 237pp, 2014.

〔産業財産権〕

○出願状況(計　　件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
出願年月日:
国内外の別:

○取得状況(計　　件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
取得年月日:
国内外の別:

〔その他〕
ホームページ等

6. 研究組織

(1)研究代表者
　西谷　達雄 (NISHITANI TATSUO)
大阪大学・その他部局等・名誉教授

研究者番号:80127117

(2)研究分担者
(　　)

研究者番号:

(3)連携研究者
(　　)

研究者番号:

(4)研究協力者
(　　)