

平成 30 年 6 月 11 日現在

機関番号：16301

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2014～2017

課題番号：26400171

研究課題名(和文)非線形放物型偏微分方程式における臨界指数と解の挙動

研究課題名(英文)Critical exponent and the behavior of solutions to nonlinear parabolic partial differential equations

研究代表者

内藤 雄基 (Yuki, Naito)

愛媛大学・理工学研究科(理学系)・教授

研究者番号：10231458

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,700,000円

研究成果の概要(和文)：半線形楕円型方程式の正值球対称解について、2つの解が交点を持つかどうかという観点から、解構造の分類を行った。解が分離構造をもち、それらの極限として特異解が得られることを示した。また、空間次元と係数関数の挙動から決定される指数において、方程式の性質が大きく変化することを示した。優Sobolev 臨界の非線形性を持つ非線形熱方程式の Cauchy 問題の解の挙動について研究を行った。重み付きノルムによる解の収束性について考察を行い、定常解の大域的収束性を示した。とくに、接合漸近展開を基礎とした比較定理を用いることにより、ある種の初期データに対する収束レートを得ることができた。

研究成果の概要(英文)：We consider the semilinear elliptic equation and study separation phenomena of positive radial solutions. With respect to intersection and separation, we establish a classification of the solution structures. We show that, under the suitable conditions, the equation has the structure of separation and possesses a singular solution as the upper limit of regular solutions. We also reveal that the equation changes its nature drastically across the critical exponent which is determined by the space dimension and the order of the behavior of the coefficient function. We consider the behavior of solutions to the Cauchy problem for a semilinear heat equation with supercritical nonlinearity. We study the convergence of solutions to steady states in a weighted norm, and show the global attractivity property of steady states. We also give its convergence rate for a class of initial data. Proofs are given by a comparison method based on matched asymptotic expansion.

研究分野：非線形偏微分方程式

キーワード：非線形熱方程式 定常問題 自己相似解 優Sobolev臨界

1. 研究開始当初の背景

(1) 非線形問題においては、初期値や方程式に含まれるパラメータやをわずかに変えるだけで解の挙動や性質が劇的に変化するような現象が多く知られている。そのような特異な現象は、定常問題のある特殊な解構造により引き起こされることが知られている。

(2) 非線形熱方程式の定常問題においては、空間次元によって決定される臨界指数が存在する。とくに Sobolev 臨界指数および超臨界指数とも呼ばれる空間 10 次元以上で現れる Joseph-Lundgren 臨界指数が解の性質に大きな影響を及ぼすことが明らかになりつつある。

2. 研究の目的

(1) 非線形放物型偏微分方程式および楕円型偏微分方程式に対して、解の漸近的性質および解構造と臨界指数との関連性について考察を行う。とくに、超臨界指数とも呼ばれる空間 11 次元以上で現れる Joseph-Lundgren 臨界指数が解の性質に及ぼす影響について考察を行う。

(2) 非線形熱方程式に対して前方自己相似変換された問題を考察することにより、時間大域解の漸近挙動について考察を行うとともに、空間 10 次元以上において知られている現象が、自己相似解のスケールにおいては 9 次元以下で起こり得ることを示す。

3. 研究の方法

(1) Joseph-Lundgren 臨界指数と定常問題における解の分離性の観点からの考察については、全空間および半空間における Liouville 型定理を組み合わせることにより解構造の分類を行う。定常問題の解構造と放物型問題の解の挙動の関連については、分離構造および部分分離構造をもつ場合を重点的に考察する。解の分離性から、その線形化作用素の正值性が得られ、さらに比較定理を用いることにより、放物型問題の解の大域的安定性、および適当なクラスにおける安定性(部分安定性)を導く。

(2) 優 Sobolev 臨界の問題に対しては、解を球対称なクラスに限定することにより常微分方程式論からのアプローチを強化する。また、Joseph-Lundgren 臨界の Hardy 不等式による特徴付けにおいては、係数関数の特異性とコンパクト性の回復についての微妙なバランスを議論するため弱収束列の漸近的性質に関する concentration-compactness lemma などの変分的手法を用いる。

4. 研究成果

(1) 非線形楕円型偏微分方程式の正值球対称解に対して、2つの解が交点を持つかどうか

かという観点から方程式の解構造について考察を行った。まず、この観点からの方程式の分類を行い、解構造と正值全域解の存在・漸近挙動との関連を示すことに成功した。また、その解構造が JL 臨界指数を超えることにより大きく変化することを示すことができた。さらに JL 臨界指数においては、係数関数のある種の単調性により、解の構造が決定されることが明らかになった。

(2) べき乗型非線形項をもつ非線形熱方程式の Cauchy 問題の時間大域解の漸近挙動について考察を行った。非線形熱方程式の Cauchy 問題においては、2つの解の初期関数が空間無限で十分に近ければ、それらの解は時間無限大で近づいてくることが知られている。本研究では、漸近接合展開法に基づく比較定理を駆使することにより、優 JL 臨界指数をもつ問題において、重み付きのノルムにおける定常解への収束レートを与えることができた。

(3) Sobolev 劣臨界における非線形楕円型偏微分方程式および非線形放物型方程式に対して、非線形項の係数関数が非負であり零領域をもつ場合 (semidefinite case) の事前評価 (a priori estimate) について考察を行った。スケーリング法を適用することにより、事前評価に対する問題が特別な非線形楕円型偏微分方程式に対する Liouville 型問題に帰着されることを示すとともに、その Liouville 型定理を導いた。非負係数関数が零領域をもたない場合には、係数関数を正定数とする非線形楕円型偏微分方程式に対する Liouville 型問題に帰着されることが知られているが、非負係数関数が零領域をもつ場合には、係数関数が部分空間のみに依存する係数関数をもつ非線形楕円型偏微分方程式に対する Liouville 型問題に帰着できることを示すことができた。

(4) 非線形常微分方程式系の解の幾何学的な性質について考察を行った。half-linear というスケーリングに関してある種の同次性をもつ方程式系に対して、解軌道が可長のかそうでないか、という問題を考え、それらの性質を満たす解をもつための方程式系の係数関数に対する必要十分条件を示した。

(5) 非線形楕円型偏微分方程式の境界値問題の解の分岐構造について考察を行った。分岐問題において安定最小解の臨界に現れる極解が特異的であるかどうかという問題の考察を行った。特異解の存在・一意性を示し、さらにその特異解が極解であるための必要十分条件を明らかにすることができた。

(6) べき乗型の非線形項を持つ非線形熱方程式の解の漸近的性質について考察を行った。非線形熱方程式は、空間次元が 11 次元

以上かつべき乗の指数が Joseph-Lundgren の指数より大きい場合、初期関数に応じて複雑な挙動を持つことが知られている。ここでは、初期関数が自己相似解のオーダーで減衰する Cauchy 問題を考え、空間 3 次元以上に於ける解の時間大域挙動が、初期関数の空間無限遠方での挙動で決定されることを明らかにした。また、その性質と初期関数に関する連続依存性を用いることにより、自己相似解の減衰オーダーにおいて、初期関数に応じて複雑な挙動を持つ解の構成をすることができた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 10 件)

Yuki Naito, Mervan Pasic, Satoshi Tanaka, Rectifiable and nonrectifiable solution curves of half-linear differential systems, *Mathematica Slovaca*, 68(2018) 575--590 査読有り Doi: 10.1515/ms-2017-0126

Yuki Naito, Asymptotically self-similar behaviour of global solutions for semilinear heat equations with algebraically decaying initial data, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* (to appear) 査読有り

Katsuyuki Ishii and Takahiro Izumi, Remarks on the convergence of an algorithm for curvature-dependent motions of hypersurfaces, *Discrete Continuous Dynamical Systems*, 38(2018) 1103-1125. 査読有り
Doi: 10.3934/dcds.2018046

Yuki Naito, Takashi Suzuki, Yohei Toyota, A priori bounds for superlinear elliptic equations with semidefinite nonlinearity, *Nonlinear Anal.* 151 (2017), 18--40. 査読有り
DOI: 10.1016/j.na.2016.11.016

Katsuyuki Ishii and Masato Kimura, Convergence of a threshold-type algorithm using the signed distance function, *Interfaces and Free Boundaries*, 18, 2016, 479 -- 522, 査読有り DOI: 10.4171/IFB/371.

Yuki Naito, Global attractivity and convergence rate in the weighted norm for a supercritical semilinear heat equation, *Differential Integral Equations* 28 (2015) 777--800. 査読有り
<http://projecteuclid.org/euclid.die/>

[1431347863](#)

Yuki Naito, A remark on self-similar solutions for a semilinear heat equation with critical Sobolev exponent, *Advanced Studies in Pure Mathematics* 64 (2015) 461--468. 査読有り

Yuki Naito, Convergence rate in the weighted norm for a semilinear heat equation with supercritical nonlinearity, *Kodai Math. J.* 37 (2014) 646-667. 査読有り
doi:10.2996/kmj/1414674614

Soohyun Bae, Yuki Naito, Existence and separation of positive radial solutions for semilinear elliptic equations, *J. Differential Equations* 257 (2014) 2430-2463. 査読有り
DOI: 10.1016/j.jde.2014.05.042

K. Ishii, An approximation scheme for the anisotropic and nonlocal mean curvature flow, *NoDEA. Nonlinear Differential Equations and Applications*, 21(2014) 219-252, 査読有り DOI: 10.1007/s00030-013-0244-z.

[学会発表](計 2 1 件)

内藤 雄基, Asymptotic self-similarity of solutions to semilinear heat equations, 研究集会「Mathematical Analysis on Nonlinear PDEs」東北大学 2017 年

内藤 雄基, Incomplete blow-up of solutions for semilinear heat equations with supercritical nonlinearity, 研究集会「第 3 4 回九州における偏微分方程式研究集会」九州大学 2017 年

Yuki Naito, Separation structure of solutions for elliptic equations with exponential nonlinearity, 2017 International Workshop on Nonlinear PDE and Applications, KAIST, Korea, 2017 年

Yuki Naito, Singular sextremal solutions for supercritical elliptic equations in a ball, *Equadiff2017*, Bratislava, Slovakia, 2017 年

内藤 雄基, Asymptotic behavior of global solutions for semilinear heat equations with slowly decaying initial data, 愛媛大学における微分方程式セミナー 愛媛大学 2017 年

Yuki Naito, Asymptotically self-similar behavior of global solutions to semilinear heat equations, Qualitative Theory on Nonlinear Partial Differential Equations, 岡山大学 2017 年

Yuki Naito, Asymptotically self-similar behavior of global solutions to semilinear heat equations, Nonlinear Analysis, PDEs, and Applications, Jeju, Korea 2017 年

内藤 雄基, Classification of bifurcation diagrams for supercritical elliptic equations in a ball, 第 141 回神楽坂解析セミナー東京理科大学 2016 年

Yuki Naito, Peaking solutions to semilinear heat equations with supercritical nonlinearities, 7th Euro-Japanese Workshop on Blow-up, Bedlewo, Poland, 2016 年

鈴木貴, 豊田洋平, 内藤雄基, A priori bounds for superlinear elliptic equations with semidefinite nonlinearity, 日本数学会秋期大会、関西大学 2016 年

内藤 雄基, Singular extremal solutions for supercritical elliptic equations in a ball, 常微分方程式の定性的理論ワークショップ, 島根大学, 2016 年

内藤 雄基, Threshold solutions for semilinear heat equations with polynomial decay initial data, 東北大学応用数学セミナー, 東北大学、2015 年

内藤 雄基, Threshold solutions for semilinear heat equations with polynomial decay initial data, ひこね解析セミナー, 彦根市 2015 年

Yuki Naito, Some remarks on separation property of solutions for elliptic equations with exponential nonlinearity, 2015 International Workshop on Nonlinear PDE and Application, Pusan National University, Korea, 2015 年

Yuki Naito, Separation structure of positive radial solutions for

semilinear elliptic equations, Equadiff 2015, Lyon, France, 2015 年

内藤雄基, Global attractivity in the weighted norm for a supercritical semilinear heat equation, 日本数学会秋期総合分科会 京都産業大学, 2015 年

内藤 雄基, Structure of positive solutions for semilinear elliptic equations with supercritical growth, RIMS 研究集会「偏微分方程式の解の形状と諸性質」京都大学数理解析研究所 2015 年

内藤 雄基, Structure of positive solutions for semilinear elliptic equations with supercritical growth, 第 5 回弘前非線形方程式研究会, 弘前大学 2015 年

Yuki Naito, Threshold solutions for semilinear heat equations with polynomial decay initial data, 6th Euro-Japanese Workshop on Blow-up, 東京工業大学 2014 年

内藤雄基, Critical phenomena in the separation property for semilinear elliptic equations, 日本数学会 2014 年度秋季総合分科会, 広島大学 2014 年

21 内藤 雄基, Threshold solutions for semilinear heat equations with polynomial decay initial data, 九州関数方程式セミナー九州大学 2014 年

〔その他〕ホームページ等

<http://www.math.sci.ehime-u.ac.jp/~ynaito/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

内藤 雄基 (Yuki Naito)

愛媛大学・大学院理工学研究科・教授

研究者番号：10231458

(2) 研究分担者

石井克幸 (Katsuyuki Ishii)

神戸大学・大学院海事科学研究科・教授

研究者番号：40232227

(3) 連携研究者

柳田 英二 (Eiji Yanagida)

東京工業大学・大学院理工学研究科・教授

研究者番号：8017548

石渡 道徳 (Michinori Ishwata)

大阪大学・大学院基礎工学研究科・教授
研究者番号：30350458

仙葉 隆 (Takasi Senba)
九州工業大学・大学院工学研究科・教授
研究者番号：30196985

梶木屋 龍治 (Ryuji Kajikiya)
佐賀大学・大学院工学研究科・教授
研究者番号：10183261

吉川 周二 (Syuji Yoshikawa)
愛媛大学・大学院理工学研究科・准教授
研究者番号：80435461

猪奥 倫左 (Norisuke Ioku)
愛媛大学・大学院理工学研究科・助教
研究者番号：50624607