様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ３０ 年　 ６ 月 １５ 日現在

機関番号：１７６０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2014～2017
課題番号：２６４００１７３

研究課題名（和文）縮約系を応用した高次元空間にみられる現象の解明と解析的手法の構築

研究課題名（英文）Elucidation of phenomena in the higher dimensional domain applying the reduced system and construction of the mathematical method

研究代表者
辻川　亨（Tsujikawa, Tohru）

宮崎大学・工学部・教授

研究者番号：１０２５８２８８

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,000,000円

研究成果の概要（和文）：反応拡散方程式の研究はパターン形成の解明に重要である。本研究はある種の生物の個体群密度を記述するLotka-Volterra競合系モデルについて、Newmann境界条件のもと方程式の係数をパラメータとした、非定数定常解の大域的解構造を決定することである。非定数定常解の存在のための十分条件をLeray-ScauderのDegree理論を用いて示した。また大域的解構造は数値計算から複雑であると予想され、ある種の縮約系を導入することで、方程式は積分条件付きのスカラー方程式となる。この方程式の解構造は定数解からの分岐理論で十分調べられており、積分条件を等高線解析により解析して大域的解構造を示した。

研究成果の概要（英文）：The study of Reaction-Diffusion Equation is important to elucidate the pattern formation. This research is to determine the global structure of nonconstant stationary solutions of Lotka-Volterra competition model, which describes the population dynamics of some biology. Under Neumann boundary condition, we show the sufficient condition of the existence of nonconstant solutions for coefficient parameters by Leray-Shauder degree theory. On the other hand, we know that the solution structure is complex by numerical computations. In order to show the global solution structure, we introduce a limiting system by using some reduction to the model equation. It is a scalar equation with an integral constraint. Since the solution structure of this scalar equation is well known by the bifurcation theory, we obtain the global solution structure due to solve the integral constraint by using Levelset analysis.

研究分野：応用数学

キーワード：differential equation　bifurcation method　singular perturbation

１．研究開始当初の背景

反応拡散方程式に関する研究はTuring不安定性の発見を契機として発展してきた。また、Keller-Segelなどの移流項を持つ方程式に関する研究成果も近年多数公表されている。また、三村と辻川（1993年）は走化性と増殖効果が同じ時間スケールで観察される現象を記述した数理モデル**（CGモデル）**を提唱した。このモデルは、ある種の細胞性粘菌について、Budrene と Berger（Nature, 1991）により得られた実験結果をある状況では再現している。また、同種の方程式としてErtleにより解明された金属表面上の触媒反応現象を記述するモデル**（ADモデル）**がある。Mikhailovのグループ（1999）は漸近展開法と数値計算を用いて1次元および軸対称定常解の存在を示し、また同時期に申請者も同様の結果を得た。しかし、2次元問題についてパラメータに関する大域的な（定常解、進行波解など）解および力学的構造が十分解明されたとは言えず、この点を明らかにする。

八木と辻川はKuznetsovとAntonovsky(1981)により提唱された、森林を形成するある種の樹木を幼年期と青年期に分類し、青年木が生成する胞子の拡散による森林成長のメカニズムを記述する**森林成長モデル（AFモデル）**について、時間大域解の存在およびその漸近挙動を示した。植生に関して風、発芽期間などの影響を考慮することは数理生物学において重要な問題であり、本研究では拡張森林モデルを提案し、その力学的構造を明らかにする。

また、化学反応波を記述する反応拡散方程式（BZモデル）について、Mikhailovのグループはその波を曲線と近似することで、縮約系としてキネマティック方程式を提案し、スパイラルパターン等の解析に役立ってきた。そこで、空間非一様な反応場において、この方程式の有用性とその適応範囲について縮約系の観点から議論する。

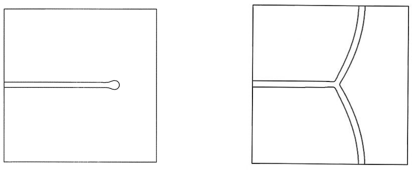
２．研究の目的

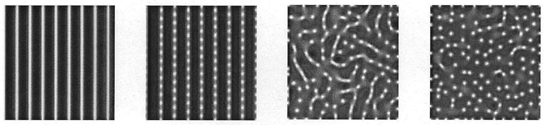
自然現象を記述する偏微分方程式の中で、移流効果を含む反応拡散方程式が数多く知られている。これらの方程式について、様々な時間・空間パターンの出現が予想され、またその存在が部分的に知られている。移流効果が強い（または増殖・反応効果がない）場合、ケラー・ジーゲル方程式などでは特異な現象（爆発解の存在）が起るが、増殖（減衰）効果が強い場合には時間大域解が存在する。本研究の目的は、高次元空間領域において移流項を含む反応拡散方程式系などについて、拡散、移流、増殖（反応）効果の影響を中心に、さまざまな解の存在、安定性及び領域の形状の依存性などを方程式の適切な縮約系を導出し、それを解析することでパターン形成のメカニズムを解明する。特に、２変数系における本質的高次元解の形状を含めた存在に関する結果は数少ない。そこで、分岐理論（特に解析の難しい２次分岐）、摂動論などにより、大域的な解および力学的構造を解明する。また、Mikhailov のグループが提唱した、2次元領域での化学波の挙動を曲線運動として記述する縮約系としてのキネマティック方程式の有用性も考察する。

具体的な問題：

（１）三村と辻川の論文（1996）の数値計算で得られた<u>2次元進行波解</u>（下図）について、その存在（三叉構造と棒状構造を持つもの）、走化性の強さ（移流係数の大きさ）に関する進行波解の速度依存性を解明する。

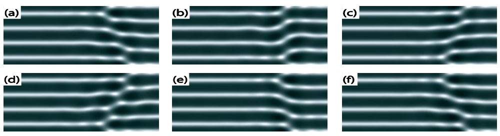
（２）数値計算による2次元矩形領域での定常パターンの不安定化メカニズムの解明：移流係数が増加する場合、下図のようにストライプ→ドットを含むストライプパターン→ドットを含む動的スネーキーパターン→ランダムな動的ドットパターン(Aida, Tsujikawa, Yagi,2006)





2次元パターン

（3）FitzHugh-Nagumo 方程式について、2 次元帯状領域におけるストライプパターンの欠陥による定常パターンについて、分岐点近傍でその存在が連携研究者栄により示されているが、CG モデルについて数値計算で得られた（下図）分岐点から離れた周期解の存在を示す。



３．研究の方法

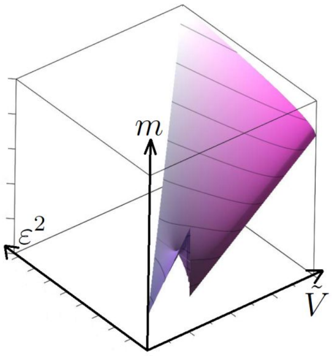
反応拡散方程式において、解の存在および力学的構造を明らかにするため、ある種の極限系（縮約系）を導入する。縮約系は元の方程式と比較して解くべき方程式の数が減少するなどにより、その解析が容易になる場合がある。本研究では適切な縮約系を導入し、定常解、進行波解などの大域的構造およびその安定性を分岐理論などにより調べる。次に縮約系の適切性を調べるため、大域的アトラクター等の力学系の観点から、摂動論を用いて、縮約系の構造が元の反応拡散方程式のそれに反映されることを示す。また、解析が容易である１次元問題の解構造を明らかにし、多次元問題にアプローチする。その他、非一様反応場（光制御、反応容器の凹凸など）における、化学波の運動を実験と数値計算により調べ、キネマティック方程式から得られる結果と比較することにより、縮約系としての適切性を検討する。

４．研究成果

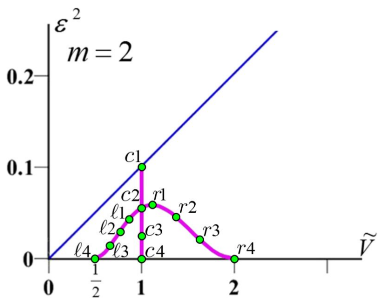
ある種の生物の個体群密度の時間空間変化を記述する拡散効果と移流効果をもつ２変数の反応拡散方程式の１つである Lotka-Volterra 競合系モデルについて、１次元区間における Newmann 問題を扱う。この方程式の係数に関する非定数定常解の大域的解構造および解の安定性を決定することは重要な問題である。この問題について、非定数定常解の存在のための十分条件を Leray-Scauder の Degree 理論を用いて示した。この大域的解構造は数値計算から複雑であると予想されるため、方程式のある種の縮約系を考察した。１つの拡散と移流係数を無限大にすることで、積分条件付のスカラー方程式(Shadow system)が得られる。分岐理論から、この方程式の解構造は定数解からの分岐として研究されている。そこで、積分条件を、等高線解析を利用して調べることにより、解の大域的構造を得た。この解構造は方程式に含まれる係数をパラメータとする領域内での曲線として表示され、その両端は内部遷移層と境界層をもつ２種類の解に対応している。一方、ロジスティック増殖を仮定した走化性モデル方程式についても、同様の極限方法により縮約系を求めることができる。この場合も解構造はパラメータ領域内での曲線として表示される。端点ともに境界層をもつ解であるが、一方は値が１点で爆発するものに収束するという違いがある。

細胞極性モデルは２変数系の反応拡散方程式であるが、２つの式反応項は符号を除いて同じ形でありかつ多項式表示されているという特徴がある。１つの拡散係数を無限大にすることにより積分条件付きのスカラー方程式が得られる。この方程式の解は楕円関数と完全楕円積分を用いて表示可能となる。したがって、積分の値をパラメータ依存の曲面として表示できることから積分条件を調べることができた。これにより、解構造を具体的に表示できた。また、数値計算により定数解から分岐した非定数定常解が２次分岐を

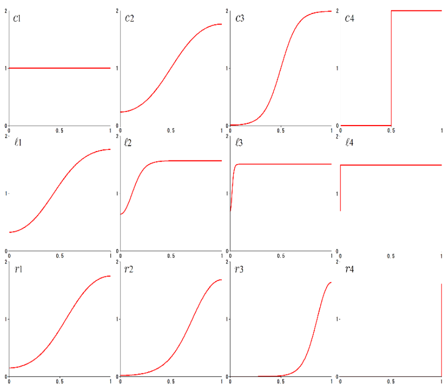
起こすこと、またこれらの解の安定性を調べた。この理論結果は極性細胞モデルに関する Mori, Jilkine, Edelstein-Keshet の数値計算結果とも一致する。２次分岐現象を理論的に証明することは難しく、今後の研究課題である。



解曲面



大域的解構造



特徴的な定常解の形状

5．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計４件）

① Tatsuki Mori, Kousuke Kuto, Tohru Tsujikawa and Shoji Yotsutani, Exact multiplicity of stationary limiting problem of a cell polarization model, Discrete Contin. Dyn. Syst.,査読有 36 (10), 2016, pp. 5627-5655.

② Tatsuki Mori, Kousuke Kuto, Masaharu Nagayama, Tohru Tsujikawa and Shoji Yotsutani, Global bifurcation sheet and diagrams of wave-pinning in a reaction-diffusion model for cell polarization, Discrete Conti. Dyn. Syst., Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, AIMS Proceedings, 査読有 2015, pp. 861-877.

③ Kousuke Kuto and Tohru Tsujikawa, Limiting structure of steady-states to the Lotka-Volterra competition model with large diffusion and advection, J. Differential Equations, 査読有 258 (5), 2015, pp. 1801-1858.

④ Tohru Tsujikawa, Kousuke Kuto, Yasuhito Miyamoto and Hirofumi Izuhara, Stationary solutions for some shadow system of the Keller-Segel model with logistic growth、Discrete Conti. Dynam. Syst. Series S, 査読有 8(5), 2015, pp. 1023-1034.

〔学会発表〕（計４件）

① Tohru Tsujikawa, “Global bifurcation and continuation for a nonlocal Allen-Cahn equations” The international conference on Reaction diffusion system, theory and applications, Meiji University, Tokyo, 2017, May 17.(Invited speaker)

② 辻川亨、“大腸菌パターンにおける伝搬パルス”、研究集会「題 13 回生物数学の理論とその周辺」数理解析研究所、2016 年 11 月 16 日

③ 辻川亨、”Secondary bifurcation for bistable equations with nonlocal constraint”, 研究集会「阿波セミナー

2016「非線形現象の数理解析」」徳島大学総合科学部、2016 年 3 月 9 日

④ 辻川亨、“ 走化性増殖モデル方程式における定常解の大域的構造と安定性について ” 研究集会「第 12 回生物数学の理論とその応用」数理解析研究所、2015 年 11 月 24 日

６．研究組織

(1)研究代表者

辻川　亨（TSUJIKAWA, Tohru）
宮崎大学・工学部・教授
研究者番号：１０２５８２８８

(2)研究分担者

（　　　）

研究者番号：

(3)連携研究者

久藤　衡介（KUTO, Kousuke）
電気通信大学・情報理工学（系）研究科・教授
研究者番号：　４０３８６６０２

栄　伸一郎（EI, Shin-ichiro）
北海道大学・理学研究院・教授
研究者番号：３０２０１３６２

櫻井　建成（SAKURAI, Tatsunari）
山口芸術短期大学・芸術表現学科・准教授
研究者番号：６０３５３３２２

(4)研究協力者

（　　　）