様　式　C－１９、F－１９－１、Z－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２９ 年　 ５ 月 １７ 日現在

機関番号： ３２６６０
研究種目： 基盤研究(C)（一般）
研究期間： 2014～2016
課題番号： ２６４００１７７

研究課題名（和文）Non-standard growthを持つ汎関数に対する変分問題の研究

研究課題名（英文）Research on the variational problems for the functionals with non-standard growth

研究代表者

立川　篤（Tachikawa, Atsushi）

東京理科大学・理工学部数学科・教授

研究者番号：５０１８８２５７

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,700,000円

研究成果の概要（和文）：変分問題とは、ある与えられた「量」（汎関数）の極値を与える関数を求める問題のことを言う。変分問題の解を求めようとする際、まず「弱い意味で微分可能な解」＝弱解を求め、その弱解が、考えている問題の解として十分なレベルまで微分可能であることを示すという２つのステップから成る手法が取られることが多い。この後半のステップは「正則性の問題」と呼ばれている。本課題研究ではこの正則性の問題を、非標準的増大度(non-standard growth)を持つ汎関数、特にp(x)-growthと呼ばれるタイプの汎関数に対して扱い、新たな結果を得た。

研究成果の概要（英文）：The problem of finding critical points of a given "quantity" (functional) is called a variational problem. When we try to solve a variational problem, we often employ the method consisting of the following 2-steps: first, we find a "weakly differentiable solution" =weak solution, and, in the second step, we show that the weak solution is differentiable sufficiently for the problem under consideration. This second step is called as "regularity problem". In this research, we treated the regularity problems for the functionals of non-standard growth, especially, for so-called p(x)-growth functionals, and have gotten some new results.

研究分野： 偏微分方程式論

キーワード： 関数方程式論　変分問題　non-standard growth

1　研究開始当初の背景

以下、1.– 4. において、引用文献番号は共通のものを用い、文献表は「4 研究成果」の末尾に置く。

領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ と関数 $u : \Omega \to \mathbb{R}^n$ に対して汎関数 $\mathcal{F}(u;\Omega)$ を

$$\mathcal{F}(u;\Omega) := \int_\Omega F(x,u,Du)dx \qquad (1)$$

により定義する．ただし，$x \in \Omega$ を $x = (x^\alpha) = (x^1,\cdots,x^m)$、$u : \Omega \to \mathbb{R}^n$ を $u(x) = (u^i(x)) = (u^1(x),\cdots,u^n(x))$ と表し、$u(x)$ の微分を $Du = (D_\alpha u^i) = (\frac{\partial u^i}{\partial x^\alpha})$ と表すこととする。また、汎関数 $\mathcal{F}$ を定義する関数 $F(x,u,\xi) : \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{mn} \to \mathbb{R}$ は Carathéodory 関数、すなわち次の条件を満たす関数とする。

(1) 全ての $(u,\xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{mn}$ に対して、$F(\cdot,u,\xi)$ は可測関数.
(2) 殆ど全ての $x \in \Omega$ に対して、$F(x,\cdot,\cdot)$ は連続関数。

さらに $\xi(= Du)$ に関する増大度に関して,「増大度条件 (growth condition)」と呼ばれる次の条件を満たしているとする。
定数 $0 < \lambda \le \Lambda$, $1 < p \le q$ が存在し,

$$\lambda|\xi|^p \le F(x,u,\xi) \le \Lambda(1 + |\xi|^q)$$

を全ての $(x,u,\xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{mn}$ において満たす。

$p = q =$ 定数 の時に標準的増大度 (standard growth) もしくは $p-$ 増大度 ($p-$growth)、それ以外の場合を非標準的増大度 (non-standard growth) と呼ぶ．非標準的増大度のうち，特に $p = q = p(x)$ となる場合を $p(x)-$ 増大度 ($p(x)-$growth) と呼ぶ。

汎関数 $\mathcal{F}$ に対する変分問題を解こうとするとき，適当なソボレフ空間での解（弱解）を求め，さらにその弱解が「問題が要求するレベルまで微分可能」であることを示すという方法が採られることが多い．F に十分な滑らかさと凸性を仮定した場合には，前半のステップは一般論の枠組みで比較的容易に示される場合が多いが，後半のステップは「弱解の正則性の問題」と呼ばれ，しばしば大きな障壁となる．特に，非標準的増大度の場合は 1989 年に P.Marcellini[3] によって初めて扱われて以来，重要性が認識され注目はされているものの，その困難さ故に未解決な部分が多く残されている．この非標準的増大度の問題のうち，$p(x)-$ 増大度の問題は 1995 年に V.V.Zhikov の論文 [9] で扱われて依頼、注目されるようになり、今世紀初頭より急速に研究が進んでいる。特に未知関数がスカラー値の場合 $(n = 1)$ に対しては，近年になって、Acerbi, Mingione, Coscia, Eleuteri らにより，かなり解明されてきたと言える．一方，$n \ge 2$ の場合に対しては，Coscia-Mingione [2](1999 年)、Acerbi-Mingione [1](2001 年), 以降，筆者らによる [5] まで，目立った進展は得られていなかった．本研究では、$m,n \ge 2$, $p > 1$（p は定数または関数）の場合に対し、写像のエネルギーの一般化である

$$\mathcal{E}_p(u;\Omega) := \int_\Omega \left(g^{\alpha\beta}(x)h^{ij}(u)D_\alpha u^i D_\beta u^j\right)^{p/2} dx \qquad (2)$$

という汎関数に注目し、$\mathcal{E}_p$ を最小化する関数の正則性を研究した。ただし、ここで $(g^{\alpha\beta}(x))$, $(h^{ij}(u))$ は一様に正定値であり、それぞれの変数に関して微分可能であるとしている。また、p は定数または Ω 上で定義された連続関数で, 特に p が関数であることを強調したいときは、上で定義した汎関数を $\mathcal{E}_{p(x)}$ と記すこととする。この $\mathcal{E}_p$ の最小点 $u : \Omega \to \mathbb{R}^n$ の正則性、特に「小さな集合を除いての正則性」＝部分正則性 (partial regularity) に関して、本研究開始時点で得られていた結果を，$p-$ 増大度の場合

と $p(x)-$ 増大度の場合に分けて次に述べる。

$\mathcal{E}_p$ の最小点となる写像 u は、ある開集合 $\Omega_0 \subset \Omega$ に対して $u \in C^{1,\alpha}(\Omega_0)$ となる。以下、$d_s := \dim^{\mathcal{H}}(\Omega \setminus \Omega_0)$ とおく。

(1) $p-$ 増大度
 ① $p > 1$: $d_s < m - p$
 ② $p \geq 2$, u に有界性を仮定: $d_s < m - [p] - 1$
 ③ $p > 1$: $\partial\Omega$ 上に特異点は無い。

(2) $p(x)-$ 増大度、$p(x)$ は連続、$\gamma_1 := \inf p(x)$
 ① $p(x) \geq 2$: $d_s < m - \gamma_1$. [5]
 ② $p(x) \geq 2$, u に有界性を仮定: $d_s < m - [\gamma_1] - 1$ [6]

ここで、[ ] はガウス記号、$\dim^{\mathcal{H}}$ はハウスドルフ次元を表すとする。また、$p(x)$ はヘルダー連続であるとする。これらの仮定、記号は以下の欄においても用いる。

2 研究の目的

さまざまな状況証拠から、$p-$ 増大度の場合に対して成立する結果の殆どが $p(x)-$ 増大度の汎関数に対しても成り立つであろうと予想される。実際、「1 研究開始当初の背景」 で述べたように、(1) $p-$ 増大度の場合に対して得られている結果のうち、(1) -①に関しては、(2) $p(x)-$ 増大度の場合に対しても、$p(x) \geq 2$ という条件下で、成り立つことが筆者らの結果により知られていた。そこで、当然ながら次のような問題意識が浮かぶ。

(Q1) (2)-①の部分正則性の結果は、$p(x) > 1$ に範囲で成り立つであろうか？

(Q2) 境界上の正則性に関しても $p-$ 増大度の場合と同様の結果が得られるか？

本研究の中心的目的は、$p(x)-$energy 汎関数

$$\mathcal{E}_{p(x)}(u;\Omega) := \int_\Omega \left(g^{\alpha\beta}(x)h^{ij}(u)D_\alpha u^i D_\beta u^j\right)^{p(x)/2} dx$$

に対して、上の 2 つの質問に解答を与えることにあった。

3 研究の方法

一般に，$p-$ 増大度の場合,

$$r^{p-m}\int_{B(x,r)} |Du(y)|^p dy \tag{3}$$

という積分量を考え，$r \to 0$ のときにこの量が r^γ （$\gamma > 0$）のオーダーで減少することを示して，Morrey の定理を用いて u が Hölder 連続であること（$u \in C^{0,\gamma/p}$）を示すという手順が採られることが多い．$p-$ 増大度の場合は (3) で与えられる量に注目することは極めて自然であり，他に選択肢は思いつかないと言ってもよいだろう．しかし，$p(x)-$ 増大度の場合はどのような量を選択すべきかは自明ではない．従来の研究（[5] より以前の研究) では，任意に固定した点 $p_0 \in \Omega$ に対して，$p_2 := \sup_{B(x_0,R)} p(x)$ と $p_1 := \inf_{B(x_0,R)} p(x)$ の差が十分小さくなるように $R > 0$ をとり，各 $B(x,r) \subset B(x_0,R)$ 上で

$$r^{p_2-m}\int_{B(x,r)} |Du(y)|^{p_2} dy \tag{4}$$

という量を考えていた．謂わば，standard growth の場合の手法を単純に局所化して用いていた．これに対し、[5] において，筆者と M.A.Ragusa らが導入した量

$$r^{\rho(x,r)-m}\int_{B(x,r)} |Du(y)|^{\rho(x,r)} dy \tag{5}$$

（$\rho(x,r) := \sup_{B(x,r)} p(x)$）という量は扱いが難しい難点こそあるが，(4) で定義された量よりも $p(x)-$ 増大度の場合により適合した量であり，

より精密な評価を可能とするものであった。本研究でも上の (5) を評価し、$p-$ 増大度の場合に対して知られていた結果を $\mathcal{E}_{p(x)}$ に対して拡張していくとい方法をとった。

(2)-②の結果を得る際、$p-$ 増大度の場合に極めて有効な "blow-up"法と呼ばれる方法を $p(x)-$ 増大度に対して適合するよう改良した。この方法は境界上の正則性を得るためも有効であり、問題 (Q2) を解決するために用いた。

また、研究全体を通して、連携研究者・長澤氏の協力の下、所謂勾配流を用いた方法も検討した。

4　研究成果

境界上の正則性に関する (Q2) に対しては Catania 大学・M.A.Ragusa との共同研究により次の結果を得た。

定理 1 ([4]). $p(x)$ は Ω 上で定義されたヘルダー連続な関数で、$p(x) \geq 2$ とする。ある $h \in W^{1,s}(\Omega)$ $(s > m)$ に対して、u は Ω の境界 $\partial\Omega$ 上で h と一致する関数の中で $\mathcal{E}_{p(x)}$ の最小値を与える関数とする。このとき、$\bar{\Omega}$ の相対開集合 Ω_0 が存在し、$u \in C^{1,\alpha}(\Omega_0)$ となり、$\dim^{\mathcal{H}}(\bar{\Omega} \setminus \Omega_0) < m - \gamma_1$ を満たす。

さらに、u が有界であるとき, $\partial\Omega$ の近傍で u はヘルダー連続となる。

(Q1) に対する結果としては、$1 < p(x) < 2$ の場合に対して、筆者の指導学生であった薄羽 [8] により、$p(x) \geq 2$ の場合と同様の結果が得られていた。これは、$p(x) = 2$ が部分正則性に対する閾値ではないことを示している。しかし、正則性を得るためのさまざまな評価式中に指数として $p-2$ が現れ, $p = 2$ を境に不等式の向きが逆転する. $p-$ 増大度の場合では, それぞれ扱う場合によって独立に考えればよかったが, $p(x)-$ 増大度では 1 つの項の中に $p(x) \geq 2$ と $p(x) < 2$ が混在する場合を扱う点に困難さがあった。この困難さを乗り越えるため、補助的な量を導入することにより、$p(x) > 1$ に対して、部分正則性の結果を得ることができた。また、同時に定理 1 も $p(x) > 1$ に対して拡張することができた。この結果は [7] において発表したが、そこでは $\mathcal{E}_{p(x)}$ よりやや一般化された次の汎関数 $\mathcal{F}_{p(x)}$ に対して結果を得た。

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{F}(u;\Omega) \\
&:= \int_\Omega \left(A_{ij}^{\alpha\beta}(x,u) D_\alpha u^i D_\beta u^j \right)^{p(x)/2} dx
\end{aligned}
$$

ここで、$A_{ij}^{\alpha\beta}(x,u)$ は一様楕円性条件を満たし、x に関してヘルダー連続、u に関して C^1-級であるとする。

定理 2 ([7]). $p(x)$ は Ω 上で定義されたヘルダー連続な関数で、$p(x) \geq 1$ とする。ある $h \in W^{1,s}(\Omega)$ $(s > m)$ に対して、u は Ω の境界 $\partial\Omega$ 上で h と一致する関数の中で $\mathcal{F}_{p(x)}$ の最小値を与える関数とする。このとき、$\bar{\Omega}$ の相対開集合 Ω_0 が存在し、$u \in C^{0,\alpha}(\Omega_0)$ となり、$\dim^{\mathcal{H}}(\bar{\Omega} \setminus \Omega_0) < m - \gamma_1$ を満たす。

さらに、係数 $A_{ij}^{\alpha\beta}(x,u)$ が $A_{ij}^{\alpha\beta}(x,u) = g^{\alpha\beta}(x) h_{ij}(x,u)$ という形で与えられているとき、$\partial\Omega$ の近傍で u はヘルダー連続となる。

以上で、本研究課題の当初の目的は満足できる形で達成することが出来たので、さらに一般化された $\Phi-$ 増大度と呼ばれるタイプの汎関数に対する研究も開始した。$\Phi-$ 増大度に対する研究は、2015 年に筆者が Napoli 大を訪れたときに知己を得た A. Passarelli di Napoli 氏、F.Giannetti 氏等との共同研究であり、部分正則性に関する結果を得たが、本研究課題の対象期間での発表には間に合わなかった。

参考文献

[1] E. Acerbi and G. Mingione. Regularity results for a class of quasiconvex functionals with nonstandard growth. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)*, 30(2):311–339, 2001.

[2] A. Coscia and G. Mingione. Hölder continuity of the gradient of $p(x)$-harmonic mappings. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 328(4):363–368, 1999.

[3] P. Marcellini. Regularity of minimizers of integrals of the calculus of variations with nonstandard growth conditions. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 105(3):267–284, 1989.

[4] M. A. Ragusa and A. Tachikawa. Boundary regularity of minimizers of $p(x)$-energy functionals. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 33(2):451–476, 2016.

[5] M. A. Ragusa, A. Tachikawa, and H. Takabayashi. Partial regularity of $p(x)$-harmonic maps. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 365(6):3329–3353, 2013.

[6] A. Tachikawa. On the singular set of minimizers of $p(x)$-energies. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 50(1-2):145–169, 2014.

[7] A. Tachikawa and K. Usuba. Regularity results up to the boundary for minimizers of p(x)-energy with $p(x) > 1$. *Manuscripta Math.*, 152(1-2):127–151, 2017.

[8] K. Usuba. Partial regularity of minimizers of $p(x)$-growth functionals with $1 < p(x) < 2$. *Bull. Lond. Math. Soc.*, 47(3):455–472, 2015.

[9] V. V. Zhikov. On Lavrentiev's phenomenon. *Russian J. Math. Phys.*, 3(2):249–269, 1995.

5 主な発表論文等（研究代表者，研究分担者及び連携研究者には下線）

［雑誌論文］（計３件）

[1] A. Tachikawa and K. Usuba. Regularity results up to the boundary for minimizers of p(x)-energy with $p(x) > 1$. *Manuscripta Math.*, 査読有り, **152(1-2)**, 2017, pp.127–151. DOI: 10.1007/s00229-016-0855-x

[2] M. A. Ragusa and A. Tachikawa. Boundary regularity of minimizers of $p(x)$-energy functionals. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 査読有り, **33(2)** , 2016, pp.451–476. DOI:10.1016/j.anihpc2014.11.003

[3] M. A. Ragusa and A. Tachikawa. Partial regularity of p(x)-harmonic maps. *RIMS Kôkyûroku* （数理解析研究所講究録）, 査読無し, No.1969, 2015, pp.1–11.

［学会発表］（2 件）

[1] A. Tachikawa "Partial regularity of minimizers for $p(x)-$energy". Seminario di Analisi （ナポリ大学における公開セミナー）, 2015 年 10 月 21 日, Dipartimento di Matematica e Applicazioni "Renato Caccioppoli" Universit'a degli Studi di Napoli Federico II

[2] 立川 篤"p(x)-エネルギーを最小化する写像の正則性について". 熊本大学応用解析セミナー, 2015 年 3 月 14 日, 熊本大学黒髪キャンパス大学院自然科学研究科棟

6　研究組織

(1) 研究代表者:

立川　篤 (TACHIKAWA, Atsushi)
東京理科大学・理工学部・教授
研究者番号：50188257

(2) 研究分担者: なし

(3) 連携研究者:

長澤 壯之 (NAGASAWA, Takeyuki)
埼玉大学・理学研究科・教授
研究者番号：70202223

(4) 研究協力者:

Maria Alessandra Ragusa
Università degli Studi di Catania · Dipartimento di Matematica e Informatica · Professore Associato （准教授）

Antonia Passarelli di Napoli
Università degli Studi di Napoli “Federico II” · Dipartimento di Matematica e Applicazioni “R. Caccioppoli”· Professore Associato（准教授）

Flavia Giannetti
Università degli Studi di Napoli “Federico II” · Dipartimento di Matematica e Applicazioni “R. Caccioppoli”· Ricercatore (助教)