

令和元年5月22日現在

機関番号：32660

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2014～2018

課題番号：26400178

研究課題名(和文)(粘)弾性体における破壊現象およびAging問題に対する数学解析

研究課題名(英文) Mathematical analysis on Fracture phenomena and Aging problems in (visco) elasticity

研究代表者

伊藤 弘道 (Itou, Hiromichi)

東京理科大学・理学部第二部数学科・准教授

研究者番号：30400790

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,700,000円

研究成果の概要(和文)：破壊現象に則した弾性体モデルを考察し、以下の成果を得た。まず、非線形弾性体モデル strain-limiting model で支配されるき裂を含む領域における境界値問題について、一般化された解の一意存在性を証明した。さらに、この解が存在するための応力 歪み構成則が満たすべき十分条件とその具体例を与えた。次に、非線形粘弾性体モデルへ拡張し、同様の結果を得た。また、本研究の応用として、非破壊検査に関わる、電気インピーダンストモグラフィを用いた2次元導電板内のき裂の再構成の逆問題を考察し、物体境界における観測データからき裂を再構成する理論的アルゴリズムを確立した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究で扱った非線形(粘)弾性体モデルは線形弾性体モデルよりも広汎な破壊現象を捉えられるモデルである。そのき裂問題に対して得られた定性的理論は、き裂を含むような滑らかでない領域における非線形偏微分方程式論の発展に寄与し、新しい近似解の構成法の示唆を与えた。また、非破壊検査に関わるき裂(もしくは溶接部)の逆問題について、1回の観測データを用いた再構成アルゴリズムを開発した。これによりスポット溶接部の精度評価手法への貢献が見込まれる。

研究成果の概要(英文)：We studied elasticity models describing fracture phenomena and obtained the following results. First, in nonlinear elastic model called strain-limiting model, well-posedness of the generalized solution of a boundary value problem with a crack is shown. Second, we extended to the case of nonlinear viscoelastic model and similar results are obtained. Further, as an application of this study, we considered a reconstruction problem for cracks in two dimensional electrical conductive body by using electrical impedance tomography, and then we established a theoretical algorithm to extract cracks from measured data on the boundary.

研究分野：偏微分方程式

キーワード：非線形弾性体 き裂 非貫通条件 非線形粘弾性体 逆問題

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

現在まで偏微分方程式論は滑らかな領域内で理論が確立してきた。しかし、実際の物理現象には滑らかでない領域、例えば、き裂や角または錐、空洞や介在物などを含む領域、での解析が必要なものも少なくない。破壊現象はその代表例であり、地震や様々な材料・構造物の安全性など我々の生活に直接影響を及ぼす身近でかつ重要な現象である。破壊現象とはき裂進展過程を示す動的現象であり、その理論解析については、1920年 A.A.Griffith によって2次元線形弾性体領域におけるき裂進展に関する理論的解析が行われ、破壊現象の数理解析の先駆けとなった。その後、静的問題については数学の分野内でもき裂や角を含む線形弾性体領域における境界値問題を多くの研究者 (M.Costabel, V.A.Kondrate'v, P.Grisvard, V.G.Maz'ya, A.M.Khludnev など) が考察し、特に重み付き Sobolev 空間の導入により、数学的にも体系化されてきた。

き裂問題を扱う際の本質的な困難は、物体が満たすべき支配方程式 (系) の解がき裂先端に特異性を持ち、解の正則性が期待できないことである。この特異性は、物体に負荷がかかる際き裂先端に応力集中が起きていることを意味し、これが破壊を進行させる要因になっている。数学的には、この事が弱解を構成する上で大きな問題となることはないが、き裂進展問題などを扱う際には、き裂が進展する事によって解放されるエネルギーの割合 (物体の形状微分) を計算しなくてはならなくなり大きな障害となる。その問題点を克服するためには弱解を構成するだけでなく、解の深い性質、特にき裂先端における挙動を精密に調べる事が肝要である。例えば、2次元の場合、定常線形弾性体方程式系の解 u (変位ベクトル) については、き裂先端を中心とする極座標 (r, θ) を用いて

$$u \sim r^\alpha (K_1 \Phi(\theta) + K_2 \Psi(\theta)) \quad (r \rightarrow 0)$$

と表され、特異項の r のべき が特異性のオーダー、特異項の係数 K_1, K_2 は応力拡大係数と呼ばれ、破壊の規模を表すパラメータとして重要な量とされている。しかし、上述の変位場のき裂先端における漸近挙動には、時間変化は考慮されておらず、限定された破壊現象しか解析できないという問題点がある。実際、特異性のオーダーが時間に依存するような問題や応力拡大係数がどのように時間変化するかといった問題に対する数学的な研究は未だ十分に為されていない。これらの問題はつまり、材料定数が時間依存する偏微分方程式系を考え、その解の特にき裂先端における挙動を解析することに相当する。このような問題は破壊現象のみならず、物体の Aging 現象にも関連している。Aging 現象とは、様々な原因で、例えば、物体そのものの劣化や物体が風雨などにさらされ化学反応 (酸化など) を起こし物体の性質が変化する (劣化する) 現象であり、構造物の安全性など人間の生活に密接に関わる重要な問題である。

2. 研究の目的

上記背景を踏まえ、き裂先端における弾性体方程式の解の性質を深く解析することにより、実際に起きている破壊現象の背景にある数理構造の解明を目指す。本研究では特に、

「構造物の性質が時間変化するような問題 (構造物の劣化 (Aging) 問題) に着目して、(粘)弾性体における破壊現象の数学解析を遂行すること」

が主目的である。具体的には、き裂を含む (粘)弾性体領域において、材料定数が時間変化する場合を考察し、解の性質、特にき裂先端における性質 (漸近挙動、特異性のオーダーや応力拡大係数の時間依存性など) を解析する。

3. 研究の方法

上記目的を達成するために、破壊現象に則した弾性体モデルを解析し、時間発展も考慮した粘弾性体モデルへの拡張を考察した。また本研究の応用として逆問題についても考察した。研究期間全体を通して、効率的に研究するため、研究協力者: 池嶋優 (広島大学) K. R. Rajagopal (テキサス A & M 大学、アメリカ) V. A. Kovtunenکو (グラーツ大学、オーストリア) A. M. Khludnev (ラブレソフ流体力学研究所、ロシア) 中村玄 (北海道大学) の研究支援を要請しながら、以下の手順で研究を進めた。

(1) 海外研究協力者である K.R.Rajagopal 氏を招へいし、様々な粘弾性体モデルや非線形弾性体モデルについての研究議論を行い、新しい知見を得る。その中で、破壊現象に適したいくつかのモデルに対する数学的問題設定を行う。特に線形弾性体で表される脆性破壊よりも、より一般的な破壊現象を捉えられる非線形弾性体モデル “strain-limiting model” について、モデルの物理的背景や先行研究などを調査する。

(2) この非線形弾性体モデル “strain-limiting model” についてのき裂問題を考察する。き裂上には接触問題で使われる、物理的に意義のある非貫通条件を課す。この場合、境界値問題の

弱解の存在性も明らかではないので、き裂問題や変分法の専門家である V.A.Kovtunenکو 氏の研究協力を要請する。また、応力場のき裂先端における漸近挙動を解析する。

(3) (2)までに得られた結果を物体の Aging 問題へと応用する。これに関連する事柄としてクリープ現象と応力緩和現象がある。クリープ現象とは、物体に一定応力を負荷したとき、ひずみが時間経過とともに変化する現象である。また、応力緩和現象とは、物体に一定のひずみを与えてこれを保持するとき、応力が時間と共に変化する現象である。これらは弾性変形と時間変化に依存して変形する粘性の効果を考慮した現象の典型であるが、弾性体モデルにおいても Aging 問題を考えると応力緩和現象は起こり得る(但し、クリープ現象は弾性体モデルでは起こらない)。先行研究では、き裂を含む弾性体にひずみ履歴を考慮した Aging 問題の擬定常問題を考察し、解のき裂先端での漸近挙動などを導出している。ここでは“correspondence principle”が重要な役割を果たす。これは簡単に述べると、ひずみ履歴の含まれた問題の特異解が静弾性の問題の特異解で表現できるという原理であり、本質的な解析は既存の静弾性に対する結果で為されている。そのようにして求められた漸近挙動の特異性のオーダーの部分は時間パラメータには依存しておらず、また、本来このような Aging 現象は物体の形状からも影響を受けるはずであるが、この先行研究では考慮されていない。そこで、それらの問題点を克服すべく、ひずみ履歴を考慮した弾性体モデルから吟味する。

(4) 非破壊検査に関わる逆問題への応用を考察する。非破壊検査とは、構造物部品の内部の欠陥や微小な表面の欠陥に対して検査物を破壊せずに検査する技術である。この技術は材料の分野だけでなく、医療の画像診断(CT や MRI など)、地球科学(地球の内部構造の推定)など広汎にわたる応用がある。この問題は数学的には境界値逆問題として定式化される。そこで、観測データから未知の介在物の情報を抽出する逆問題を考察する。具体的には、様々な(粘)弾性体などの構造物の非破壊検査に関わるき裂の再構成の逆問題や材料定数の評価の逆問題を扱う。本研究を円滑に進めるために、逆問題の専門家である池畠優氏と中村玄氏の研究支援を要請する。

(5) 研究期間全体を通じて、得られた結果は専門的国际雑誌に投稿し、国内外問わず積極的に様々な分野での研究集会等で発表し、その場における意見交換を通じて本研究にフィードバックしていく。特に破壊現象に携わる地震学者や工学者との交流を深め、本研究で扱う数理モデルの妥当性や本研究結果の検証を行う。

(6) さらに時間的余裕があれば、本研究を発展させていく。例えば、き裂上に摩擦の効果を取り入れたモデルへの拡張を考察する。これは地震における断層破壊を想定している。特に、動的な問題に対しては線形弾性体であっても、非貫通条件や摩擦条件を課した問題については数学的に未解決な問題が数多く残っているので、それらの解決に貢献していく。

4. 研究成果

(1) 本研究課題の応用としての位置付けに、非破壊検査に関わる逆問題がある。ここでは、溶接の精度評価に関する逆問題について考察した。具体的には、池畠優氏(広島大学)等との共同研究により、電気インピーダンストモグラフィーによる2次元導電体薄板内の1つの線分上に存在するスポット溶接部の1組の観測データによる理論的再構成方法を確立した。池畠氏が考案した従来の囲い込み法は介在物の凸包の情報を得るためのものであったが、ケルビン変換を用いた改良版囲い込み法を援用し、本問題を解決することができた。本研究成果は池畠氏と笹本明氏との共著論文として国際専門雑誌 *Mathematical Methods in the Applied Sciences* に掲載された(雑誌論文 参照)。

(2) 研究協力者である K.R.Rajagopal 氏が考案した非線形弾性体モデル"strain-limiting model"の数学解析について考察した。このモデルの特徴は、従来の弾性体の枠組みであるコーシー弾性体などよりも一般的な、応力と歪みの構成方程式が陰関数として与えられる枠組みの1つの非線形モデルでありかつ、微小歪みの仮定は保持するものの応力に関しては何も拘束条件がない、つまり弾性体における微小変形理論の枠組みで応力集中などの現象が許容できる、ということである。このモデルで記述される2または3次元の非線形弾性体領域において、き裂上に不等式タイプの非貫通条件を課した境界値問題の一般化された解の一意存在性を証明し、さらにその解の正則性が得られた場合にはそれが通常の意味での弱解となることを示した。この研究成果は V.A.Kovtunenکو 氏と K.R.Rajagopal 氏との共著論文として国際専門誌 *Mathematics and Mechanics of Solids* に掲載された(雑誌論文 参照)。

しかし、これはある特定の応力 - 歪み構成則に対するものであったので、それを一般化し、前述の理論が成り立たための応力 - 歪み構成則が満たすべき十分条件とその具体例を与え、従来の線形弾性体モデルも包括し得ることを確かめた。この研究成果は日本応用数学会が発行する *JSIAM Letters* に掲載された。

(3) (2)で扱った"strain-limiting model"に対して、本研究課題の目的である時間変化を考察した。そのために、このモデルを粘弾性体 (Kelvin-Voigt モデル) の場合に拡張し、き裂上にトラクションフリーの条件を課した擬定常の境界値問題に対して考察した。その結果、(2)と同様に、一般化された解の存在性とそれが弱解のある意味での近似になっていることを証明した。この研究成果は V.A.Kovtunenکو 氏と K.R.Rajagopal 氏との共著論文として国際専門誌 Mathematics and Mechanics of Solids に掲載された (雑誌論文 参照)。
さらに、このモデルをクリープ現象を考慮した非線形粘弾性体モデルの場合にも拡張し、同様の一般化された解の一意存在性を証明した。

5 . 主な発表論文等

[雑誌論文](計 8 件)

Hirromichi Itou, Victor A. Kovtunenکو, Kumbakonam R. Rajagopal, On the states of stress and strain adjacent to a crack in a strain limiting viscoelastic body, Mathematics and Mechanics of Solids, 査読有, Volume 23, Issue 3 (2018), pp. 433-444.

DOI: 10.1177/1081286517709517

Hirromichi Itou, Victor A. Kovtunenکو, Kumbakonam R. Rajagopal, Nonlinear elasticity with limiting small strain for cracks subject to non-penetration, Mathematics and Mechanics of Solids, Volume 22, Issue 6 (2017), pp. 1334-1346.

DOI: 10.1177/1081286516632380

Masaru Ikehata, Hirromichi Itou, Akira Sasamoto, The enclosure method for an inverse problem arising from a spot welding, Mathematical Methods in the Applied Sciences, Volume 39, Issue 13 (2016), pp. 3565-3575. DOI: 10.1002/mma.3799

H. Itou, A. M. Khludnev, On delaminated thin Timoshenko inclusions inside elastic bodies, Mathematical Methods in the Applied Sciences, Volume 39, Issue 17 (2016), pp. 4980-4993. DOI: 10.1002/mma.3279

[学会発表](計 30 件)

Hirromichi Itou, Contacting crack faces within the context of nonlinear elastic bodies exhibiting limiting strain, (2nd International Conference on "Modern Mathematical Methods and High Performance Computing in Science and Technology" (M3HPCST-2018), Ghaziabad, India, January 5, 2018).

Hirromichi Itou, On inverse crack problems by means of the enclosure method, (The 15th Annual Meeting of the China Society for Industrial and Applied Mathematics(CSIAM2017), A3 Workshop on Modeling and Computation of Applied Inverse Problems, Qingdao, China, October 13, 2017).

伊藤弘道, き裂を含む領域における偏微分方程式の解析, (日本数学会秋季総合分科会 函数方程式論分科会 特別講演, 山形大学, September 13, 2017).

Hirromichi Itou, Nonlinear elasticity with limiting small strain for cracks subject to non-penetration, (International Conference on Elliptic and Parabolic Problems, Gaeta, Italy, May 24, 2017).

Hirromichi Itou, On reconstruction of a welding area by means of the enclosure method using a single measurement, (Applied Inverse Problems(AIP2015), Helsinki University, Finland, May 28, 2015).

伊藤弘道, 囲い込み法を用いた溶接部の一組の観測データによる再構成について, (微分方程式の逆問題とその周辺, 京都大学数理解析研究所, January 27, 2015).

Hirromichi Itou, On convergent series expansions of solutions of Navier 's equation near singular points, (Modeling, analysis and computing in nonlinear PDEs, Chateau Liblice, Czech Republic, September 22, 2014).

Masaru Ikehata, Hirromichi Itou, On reconstruction of cavities in a three dimensional linearized viscoelasticity, (7th International Conference IP:M&S (Inverse Problems: Modeling and Simulation), Fethiye, Turkey, May 27, 2014).

[図書](計 1 件)

Itou, H., Kimura, M., Chalupecky, V., Ohtsuka, K., Tagami, D., Takada, A. (Eds.), Springer Singapore, Mathematical Analysis of Continuum Mechanics and Industrial Applications -Proceedings of the International Conference CoMFoS15- (Mathematics for Industry Volume 26), 2017, pp. 213.

[産業財産権]

出願状況(計 0 件)

取得状況(計 0 件)

〔その他〕

ホームページ等

<https://www.rs.tus.ac.jp/h-itou/>

6. 研究組織

(1)研究分担者

(2)研究協力者

研究協力者氏名：池畠 優

ローマ字氏名：IKEHATA, masaru

研究協力者氏名：Alexandr M. Khludnev

ローマ字氏名：KHLUDNEV, A.M.

研究協力者氏名：Victor A. Kovtunenکو

ローマ字氏名：KOVTURNENKO, V.A.

研究協力者氏名：中村 玄

ローマ字氏名：NAKAMURA, gen

研究協力者氏名：Kumbakonam R. Rajagopal

ローマ字氏名：RAJAGOPAL, K.R.

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。