

平成30年6月5日現在

機関番号：32665

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2014～2017

課題番号：26400190

研究課題名(和文) Thomassen予想とTutte閉トレイル問題の研究

研究課題名(英文) On Thomassen Conjecture and Tutte closed trail Problem

研究代表者

善本 潔 (YOSHIMOTO, Kiyoshi)

日本大学・理工学部・教授

研究者番号：90307801

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,700,000円

研究成果の概要(和文)：Thomassen予想とは、4連結ライングラフはハミルトンサイクルを持つという予想で、edge dominating cycleを持つという予想と同値である。本研究では、4連結線グラフにおけるハミルトンサイクルの条件を弱めた2因子の存在とessentially 4-edge-connected graphにおけるTutte閉トレイルの存在について研究を行い、Thomassen予想とJackson予想との関係や同値性や本研究者とJackson教授のessentially 3-edge-connected cubic graphの2因子に関する結果を強化することに成功した。

研究成果の概要(英文)：Thomassen's conjecture is that any 4-edge connected line graph has a Hamilton cycle. This conjecture is equivalent to the following conjecture: any essentially 4-edge connected graph has a edge dominating cycle. In this research, we mainly studied followings: 1. existence of 2-factors in 4-edge connected line graphs which has properties weaker than properties of Hamilton cycles and 2. existence of Tutte closed trails in any essentially 4-edge connected graph. In consequence, we obtained followings: 1. the relation and the equivalence on Thomassen's conjecture and Bondy's conjecture and 2. in essentially 3-edge connected cubic graphs, the existence and the number of connected components of spanning subgraphs in which every connected components are closed trails. Such spanning subgraphs generalizes 2-factors. The third result improve the results by Yoshimoto and Bill Jackson on the number of connected components of essentially 3-edge connected cubic graphs.

研究分野：グラフ理論

キーワード：ハミルトンサイクル 2因子 Thomassen予想 Bondy予想 Tutte閉トレイル cubicグラフ

1. 研究開始当初の背景

ライングラフとは、与えられたグラフ G (ブレイメージグラフと呼ぶ) の辺集合 $E(G)$ 上に定義されるグラフである。ハミルトンサイクル (グラフの全ての頂点を通るサイクル) の問題は、グラフ理論の重要な問題の一つであり、その中で最も有名な未解決問題の一つが 1986年に Thomassen が提唱した「4 連結ライングラフはハミルトンサイクルを持つ (Thomassen 予想)」である。

Kuzel は「Thomassen 予想が正しければ、4 連結ライングラフは 2 辺ハミルトン連結である」ことを示した。2 辺ハミルトン連結とは、グラフに任意の二辺を加えたとき、その二辺を通るハミルトンサイクルがあると性質である。そして Kuzel は「ライングラフの 2 辺ハミルトン連結性は NP 完全である (Kuzel 予想)」を提唱した。さらに Ryjacek や Kuzel らは、Kuzel の定理を利用して、P NP 予想、Thomassen 予想、Kuzel 予想の三つの予想の中で少なくとも一つは正しくないことを示した。

Thomassen 予想に対する最初の肯定的な結果は、Zhan による「7 連結ライングラフはハミルトンサイクルを持つ」である。この結果はこれまで多くの改良や一般化がなされてきた。ハミルトン性についての最新の結果は、Kaiser と Vrana による「最小次数が 6 以上の 5 連結ライングラフはハミルトンサイクルを持つ」である。しかしその証明は本質的には Zhan の証明と同じく、Tutte や Nash-Williams の定理をライングラフのブレイメージグラフに利用しており、Kaiser が指摘しているようにこれ以上の改良は難しい状況であった。

2. 研究の目的

上記の通り P NP 予想と深い関係のある Thomassen 予想「4 連結線グラフはハミルトンサイクルを持つ」の解決を目指し、特に低連結ライングラフの構造を分析・特徴付けを行い、4 連結ライングラフとの構造の相違を解明する。江川-太田などの結果から、最小次数 4 以上のライングラフは、連結度の条件無しに、2 因子 (全ての頂点の次数が 2 であるような全域部分グラフ) をもつことが知られている。ハミルトンサイクルは 1 成分からなる 2 因子なので、その性質、特に成分数の研究が非常に重要である。本研究では、低連結ライングラフが持つ 2 因子の成分数の上限や成分の分布、最大独立点集合との関係を解析することによって、4 連結ライングラフに関する Thomassen 予想や Kuzel 予想を解決する新たな手法と理論を構築することを目的とした。

3. 研究の方法

最小次数 4 以上の (連結度の条件のない) ライングラフの 2 因子の成分数の上限は、本研究者とオランダの Broersma 教授やイギリスの Paulusma 博士との共同研究により、ほぼ最良な値が得られている。一方、3 連結ライングラフの成分数の上限は、3 連結性の扱いが難しく、これまであまり多くの成果は得られてこなかった。しかし、本研究者はチェコの Kuzel 博士・小関准教授との共同研究および Ryjacek 教授らとの共同研究で、3 連結ライングラフの最大独立点集合の位置とその 2 因子による分割の仕方を解析することによって、一般のライングラフにおける上限と比較して、初めて本質的に改良することに成功した。しかしそれは最良な値ではなく、予想される上限との間には未だに大きな差がある。その原因は、3 連結ライングラフにおける最大独立点集合と 2 因子の関係が十分に解析されていないことに起因している。そこで以下の 3 つの問題の解決を主テーマとして研究を行った。

- ・ 3 連結ライングラフの最大独立点集合の配置とその 2 因子による分割の研究
- ・ 3 辺連結 3 正則グラフにおける長さ 5 のサイクルの分布の研究
- ・ Jackson 予想および閉トレイルの研究

4. 研究成果

ハミルトンサイクルは連結成分が 1 個の 2 因子と同値である。したがって、連結成分数が制限された 2 因子の研究が重要である。そこで各連結成分 (サイクル) の大きさの下限について研究を行い、2 連結クローフリーグラフが、最小次数を n とした時、各連結成分が $(n-1)/2$ 点からなる 2 因子を持つことを、Cada 准教授、千葉講師との共同研究によって示した。

3 連結ライングラフの最大独立点集合の配置とその 2 因子による分割の研究については、独立数を n としたとき、3 連結クローフリーグラフは連結成分の数が高々 $2(n+1)/5$ 個の以下の 2 因子が存在するか、ハミルトンサイクルが存在することを示すことに成功した。この結果は、ライチェック教授、小関准教授との共同研究による。

3 辺連結 3 正則グラフにおける長さ 5 のサイクルの分布の研究では、本研究者と Jackson 教授との結果を改良するために、全域部分グラフを支配的部分グラフに置き換えることによって、各連結成分が 6 点以上からなる支配的部分グラフが 3 連結 3 正則グラフに存在することを、Cada 准教授、千葉講師、小関准教授との共同研究によって示した。

Jackson 予想および閉トレイルの研究については、Thomassen 予想と Jackson 予想すなわち「2 連結クローフリーグラフは Tutte 閉トレイルを持つ」とが同値であることを示した。この結果は、Cada 准教授、千葉講師、小関准教授、Vrana 博士との共同研究による。

Faudree 教授や Li 教授との共同研究では、稠密なグラフにおけるハミルトンサイクルについて研究を行い、次のような結果を得た。すなわち、位数 n のグラフで、 $n \geq 5k+2$ となる任意の k に対して、最小次数が $(n+k-1)/2$ 以上あるならば、任意に指定した交差の無い二つの $X=\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ と $Y=\{y_1, y_2, \dots, y_k\}$ に対して、 X の点と Y の点を交互に通るハミルトンサイクルが存在する(ただし、 X の点と Y の点の間に指定されていない点が入っても良い)。この結果は、グラフの k -linked 性を利用して証明されている。さらに上記最小次数の下限の最良性を与えるグラフの構成に成功している。

また Lehel らとの共同研究により、 (m, n) -2 部グラフが最小次数が $m/2+1$ 以上ならば、bipanconnected である。すなわち、任意の 2 点 x, y と任意の $2 \leq l \leq 2n$ に対して、 x と y を結ぶ長さが l のパスが存在する。

Li 教授が日本大学を訪問された時、以下のような予想を提案した。「変着色されたグラフの最小色次数がどの程度あれば rainbow 4-cycle (全ての辺の色が異なる長さ 4 のサイクル) をもつだろうか。」Li 教授は、自ら rainbow 3-cycle が存在するために最小色次数が $n/2+1$ より真に大きいことであることを自ら証明している。

本研究者は、Ryjacek 教授や Cada 准教授、金子博士とともに、以下の主張を示すことに成功した。すなわち、「グラフを三角形フリー(すなわち、そのグラフが 3-cycle を含まない)なグラフに限れば、最小色次数が $n/3+1$ より真に大きければ、rainbow 4-cycle の存在が保証される。」この最小色次数の下限は、Wang-Li-Zhu の結果を改良した結果であり、一般のグラフでは最良である。これからの課題としては、三角形フリーを取り除き、一般のグラフにすることである。

さらに、一般のグラフに対しては、同じ論文で我々は「辺着色されたグラフが最小色次数 $n/2+2$ より真に大きく持てば、長さ 4 以上の rainbow cycle を含む」ことを示した。このことから、我々は次のような予想を提案した「辺着色されたグラフの最小色次数が $(n+k)/2$ 以上ならば、長さが k 以上の rainbow cycle を持つ。

5 . 主な発表論文等

[雑誌論文](計 14 件)

R. Cada, K. Ozeki, L. Xiong and K. Yoshimoto, A pair of forbidden subgraphs and 2-connected supereulerian graphs, accepted by Discrete Mathematics, 掲載決定, 査読あり

H. Du, R. Faudree, J. Lehel and K.

Yoshimoto, A panconnectivity theorem for bipartite graphs, accepted by Discrete Math., 掲載決定, 査読あり

H. Du and K. Yoshimoto, A hamilton cycle in which specified vertices are located in polar opposite, accepted by Journal of Combinatorics, 掲載決定, 査読あり

R. Cada, S. Chiba, K. Ozeki and K. Yoshimoto, On dominating even subgraphs in cubic graphs, SIAM J. Discrete Math. 31 (2017) 890-907, 査読あり

R. Faudree, J. Lehel and K. Yoshimoto, Locating pairs of vertices on Hamiltonian cycles in bipanconnected balanced bigraphs, Graphs and Combin. 32 (2016) 963-986, 査読あり

J. Hulgan, J. Lehel, K. Ozeki and K. Yoshimoto, Vertex coloring of graphs by total 2-weightings, Graphs and Combin. 32 (2016) 2461-2471, 査読あり

R. Cada, A. Kaneko, Z. Ryjacek and K. Yoshimoto, Rainbow cycles in edge-colored graphs, Discrete Mathematics 339 (2016) 1387-1392, 査読あり

R. Faudree, H. Li and K. Yoshimoto, Locating Sets of Vertices on Hamiltonian Cycles, Discrete Applied Mathematics 209 (2016) 107-114, 査読あり

R. Cada, S. Chiba, K. Ozeki, P. Vrana and K. Yoshimoto, Equivalence of Jackson's and Thomassen's conjectures, J. Combin. Theory Ser. B 114 (2015) 124-147, 査読あり

Z. Ryjacek, K. Ozeki and K. Yoshimoto, 2-factors with bounded number of components in claw-free graphs, Discrete Mathematics 338 (2015) 793-808, 査読あり

R. Cada, S. Chiba, K. Ozeki, P. Vrana and K. Yoshimoto, A relationship between Thomassen's conjecture and Bondy's conjecture, SIAM Journal on Discrete Mathematics 29 (2015) 26-35, 査読あり

R. Cada, S. Chiba and K. Yoshimoto,

2-Factors in Claw-Free Graphs with Lower Bounds Cycle Lengths, Graphs and Combin. 31 (2015) 99-113, 査読あり

R. Faudree, J. Hulan and K. Yoshimoto, Note on Locating Pairs of Vertices on Hamiltonian Cycles, Graphs and Combin. 30 (2014) 887-894, 査読あり

R. H. Schelp and K. Yoshimoto, An Extremal Problem Resulting in Many Paths, Ars Combin. 116 (2014) 23-32, 査読あり

[学会発表](計15件)

善本潔, On rainbow $K_{\{2,2\}}$ of edge-colored graphs, The 9th Workshop on the Matthews-Sumner conjecture, 2017

善本潔, rainbow サイクルの存在について, 離散数学とその応用研究集会 2016

善本潔, Thomassen's Conjecture and even subgraphs in cubic graphs, Northwestern Polytechnical University Seminar, 2016

善本潔, On dominating even subgraphs in cubic graphs II, 応用数学合同研究集会, 2015

善本潔, Rainbow cycles in edge-colored graphs, The 39th Australasian Conference on Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing, 2015

善本潔, On dominating even subgraphs in cubic graphs, 離散数学とその応用研究集会, 2015

善本潔, On dominating even subgraphs of cubic graphs, 8th Workshop on the Matthews-Sumner Conjecture and Related Problems, 2015

善本潔, On long disjoint paths joining two specified vertices and a vertex subset, 日本数学会, 2015

善本潔, 有向グラフの強連結性の一般化について, 加納先生退職記念離散数学1日セミナー, 2015

善本潔, Locating Sets of Vertices on Hamiltonian Cycles II, 応用数学合同研究集会, 2014

善本潔, Locating Sets of Vertices on Hamiltonian Cycles, The 38th Australasian Conference on Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing, 2015

善本潔, Locating sets of vertices on Hamiltonian cycles, 日本数学会, 2014

善本潔, Rainbow cycles in edge-colored graphs, 離散数学とその応用研究集会, 2014

善本潔, Cycles in line graphs and the pre image graphs, LRI Seminar, 2014

善本潔, Locating sets of vertices on Hamiltonian cycles, KMA Seminar, 2014

6. 研究組織

(1) 研究代表者

善本 潔 (YOSHIMOTO, Kiyoshi)
日本大学・理工学部・教授
研究者番号: 90307801

(2) 研究協力者

小関 健太 (OZEKI, Kenta)

千葉 周也 (CHIBA, Shyuya)

RYJACEK, Zdenek

CADA, Roman

LI, Hao

DU, Hui

FAUDREE, Ralph

SCHHELP, Richard

VRANA, Peter

LEHEL, Jenő

HULGAN, Jonathan

XIONG, Liming