様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２９ 年　 ６ 月 １２ 日現在

機関番号：１３１０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2014～2016
課題番号：２６４００１９３

研究課題名（和文）逐次手法の効率性の研究とその応用

研究課題名（英文）Studies on efficiency of sequential procedures and its applications

研究代表者
磯貝　英一（Isogai, Eiichi）

新潟大学・自然科学系・フェロー

研究者番号：４０１０８０１４

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,500,000円

研究成果の概要（和文）：1. 位置母数と尺度母数が未知な２母数指数分布の二標本問題において，２つの位置母数の一次結合の信頼区間問題を考察した。前もって与えられた信頼係数と区間幅を満たす最小の標本数には未知な尺度母数が含まれるので実用上利用できない。そこで三段階法を用いて平均標本数及び被覆確率の２次の漸近展開式を与えた。
2. 未知な位置母数と尺度母数を持つ２つの指数分布を考え，２つの位置母数の一次結合の有界リスク点推定問題を考察した。リスクが，前もって与えられた上限以下になるような最小標本数には未知な尺度母数が含まれる。そこで三段階法を用いて平均標本数及びリスクの２次の漸近展開式を与えた。

研究成果の概要（英文）：1. On a two sample problem with two exponential distributions of which location and scale parameters are unknown, we considered the problem of fixed-width confidence interval estimation of a linear combination of two locations. Given a confidence coefficient and a length of interval, the minimum sample sizes include the unknown scale parameters and so we cannot use them in practice. Thus, by using the three-stage procedures, we gave the asymptotic second-order expansions of the average sample numbers and coverage probability.
2. We considered two exponential distributions with unknown location and scale parameters and investigated the bounded risk point estimation problem of a linear combination of two location parameters. With the risk less than or equal to a given upper bound, the unknown location parameters are included in the optimal sample sizes. Therefore, by using three-stage procedures we provided the asymptotic second-order expansions of the average sample sizes and the risk.

研究分野：数物系科学

キーワード：統計数学　逐次解析

１．研究開始当初の背景

Mahalanobis(1940)はインドのジュート作付面積の推定に関して逐次標本抽出法の開発が重要であることを示し，Wald(1947)は逐次検定の理論と応用の研究を系統的に展開した。これらが基礎となり逐次解析の発展とともに逐次手法の理論と応用が盛んに研究されている。統計的検定問題および推定問題において固定標本数では解決できない問題が生じた。例えば，信頼区間の幅と信頼係数を指定したとき，この条件を満たす最小の固定標本数で信頼区間を構成することはできないことがDantzig (1940)によって示された。Stein (1945)は１回目に得られた観測データに基づいて２回目の標本抽出を行うかどうかを判断し最大２回の標本抽出を行う二段階法を提案してこの問題を解決した。二段階法における平均標本数は最小の固定標本数に比べて非常に大きくなる性質を持っていることが分かったので，Chow and Robbins (1965)はこの性質を改良するために純逐次法を提案し二段階法より平均標本数が少ないという意味で効率が良いことを示した。しかし，純逐次法では標本抽出回数が多くなるという短所がある。そこで，Hall(1981)は標本抽出回数が少なく，かつ純逐次法の良い性質を持つ三段階法を提案した。これら３つの逐次手法を比較するとき，平均標本数など効率性の観点からの比較基準が必要になる。さらに比較を精密に行う場合は平均標本数，被覆確率およびリスクに関する高次の漸近展開式の観点からの比較も重要になる。Woodroofe (1977)は逐次解析における非線形再生理論を応用して平均標本数の漸近展開式を導いた。Ghosh and Mukhopadhyay (1981)は逐次手法の効率を比較するための基準として有効性の概念を導入した。その後，平均推定誤差と標本抽出にかかる費用の和を最小にする最小リスク問題，平均推定誤差を前もって指定された値以下にする有界リスク問題が考えられ，これらの問題を解決するために二段階法，純逐次法あるいは三段階法を含む種種の逐次手法が提案されている。

２．研究の目的

上記研究を背景として，本研究の先行研究では応用上重要である正規分布，指数分布および一般の連続型分布における未知母数およびその関数について信頼区間問題，最小リスク問題，有界リスク問題を扱い，二段階法，三段階法および純逐次法の有効性について論じる。特に，指数分布における位置母数と尺度母数の１次結合についての最小リスク問題において偏り補正を行うとリスクを減らすことができることを示した共著論文(1994) は世界の研究者に引用されている。また正規分布の母平均に関する最小リスク問題において平均標本数とリスクの３次の漸近展開式（2013）も注目されている。さらに，２つの指数分布における有界リスク問題において純逐次法を用いてベーレンス・フィッシャー問題に対応した困難な問題を 2010 年に解決した。
逐次手法の効率性を評価する場合，平均標本数，信頼区間問題における被覆確率，最小リスク問題や有界リスク問題におけるリスクに対する，２次およびさらなる高次の漸近展開式を求めることが必要になる。この高次漸近展開式を導くことにより，効率性の観点から逐次手法のさらなる比較が可能になる。具体的には正規分布や指数分布などの連続型分布に関する高次漸近展開式を求めることが目的である。また，不良品の個数の分布である二項分布など応用上重要な離散型分布に関する逐次手法論はあまり展開されていないので，離散型分布の逐次手法論を推進することも目的の一つである。

３．研究の方法

本研究は先行研究で得た研究成果を基礎にして二段階法，三段階法，純逐次法を含めた逐次手法の開発と効率性の観点から逐次手法の比較を行うことおよび逐次手法の応用を目的とした。研究代表者は研究を達成するための情報を収集し，その情報の十分な活用を目指した。研究期間では正規分布，指数分布および一般の連続型分布，二項分布を含む離散型分布における未知母数の推定問題を考えることにした。特に，２母数を持つ指数分布における二標本問題を扱った。未知な位置母数の１次結合の推定問題において信頼区間問題および有界リスク問題を考え，三段階法を定義してその性質の考察を中心課題にした。効率性の観点から平均標本数，被覆確率およびリスクの２次の漸近展開を理論的に求める努力を行った。

４． 研究成果

(1) 未知な位置母数(μ_i)と尺度母数(σ_i)を持つ２つの指数分布(Πi，$i=1,2$)における二標本問題において区間幅と信頼係数が与えられたとき，係数(b_1，b_2，$b_1 b_2 \neq 0$)が既知の位置母数の１次結合($\delta = b_1\mu_1 + b_2\mu_2$)の信頼区間問題を考えた。この問題はMukhopadhyay and Padmanabhan (1993)が考えた位置母数の差($b_1=1$，$b_2=-1$)に関する信頼区間問題を含んでいる。尺度母数が等しい($\sigma_1 = \sigma_2$)という条件が必ずしも必要としない，いわゆる， ベーレンス・フィッシャーの状況を含んでいるという意味で一般的問題を想定している。まず，与えられた条件を満たす最小の標本数を求めることを試みた。その結果，係数に関する条件に対応した最小標本数を明示的に求めることができた。しかし，この最小標本数には未知な尺度母数が含まれているため実際には利用できない。そこで，この問題を解決するために標本抽出回数が高々３回である三段階法を用いることにした。この三段階法はMukhopadhyay and Padmanabhan (1993)が提案

したものと同様のものである。第一段階では，前もって与えた標本数(m≧2)に従って各指数母集団（Πi，i=1,2）から無作為に標本を抽出して未知な尺度母数の推定量を計算し，第二段階における標本数(T_i) を定義した。もしこの標本数が最初に与えられた標本数以下(T_i≦m)であれば，この段階で標本抽出を停止する。それ以外の場合(T_i>m)は残りの標本数(T_i-m) に従って各指数母集団(Πi)から無作為に標本を抽出する。第二段階までに得られた標本を基にして，第三段階における標本数(N_i)を定義した。もしこの標本数が第二段階で定義した標本数以下(N_i≦T_i)であれば, 第二段階で標本抽出を停止する。それ以外の場合(N_i>T_i)は残りの標本数(N_i-T_i)に従って各母集団から無作為に標本を抽出する。この結果，標本数は最大でも第三段階までの標本数(N_i)以下である。最終的に得られた各母集団(Πi)からの無作為標本を利用して位置母数の１次結合(δ)の推定量を定義し，その信頼区間を構成した。このとき，平均標本数および信頼区間の被覆確率の近似値を求めることが重要になる。この近似値を求める１つの道具としてMukhopadhyay(1990)の結果がある。そこで，Mukhopadhyayの定理を用いるためには定理の仮定が満たされるかどうかを調べる必要がある。このためには一様可積分性が重要なポイントになる。独自の発想で，より一般的な分布における一様可積分性を証明することができた。この結果は本研究の中心的役割の１つである。本研究では信頼区間の幅が十分小さいとき，平均標本数および被覆確率の２次の漸近展開式を求めることができた。得られた被覆確率は与えられた信頼係数より若干小さいことが分かった。Mukhopadhyay and Padmanabhan (1993)が与えた微調整因子の導入を考慮して三段階法を修正すると，さらに精度の高い被覆確率の漸近展開式が得られることが期待されることも分かった。修正三段階法については今後の研究課題になる。本研究は下記の共著論文として投稿中である。
Three-stage confidence intervals for a combination of locations of two negative exponential distributions. Isogai and Uno (2017)

(2) 位置母数(μ_i)および尺度母数(σ_i)がともに未知な指数母集団(Πi，i=1,2)における二標本問題を考えた。ここでは２つの尺度母数は異なっていてもよいという，ベーレンス・フィッシャーの状況を想定している。与えられた係数(a_1，a_2，a_1a_2≠0)を持つ位置母数の１次結合($\delta=a_1\mu_1+a_2\mu_2$)の有界リスク点推定問題を扱った。この問題は位置母数の差を特別な場合として含んでいる。損失関数として２乗損失関数を与え，その平均をリスクとした。リスクの上限(w>0)を与えたとき，リスクがこの上限以下になる最小の標本数を用いて１次結合(δ)を推定する問題を考察した。まず，各母集団(Πi)から無作為に標本を抽出して１次結合の推定量を定義した。この推定量に対するリスクを求め，このリスクを上限以下になる最小の標本数を明示的に求めた。この最小標本数は係数の条件により異なり，また未知な尺度母数を含むので実用的でない。Isogai and Futschik(2010)は純逐次法を定義してこの問題を論じた。純逐次法とはある定義した標本抽出停止規則に従って停止規則が満たされるまで１回ずつ標本抽出を行う方法である。したがって，標本抽出回数は非常に多い。本研究では標本抽出回数が高々３回である三段階法を採用した。１次結合の推定量として Isogai and Futschik(2010)で与えられたものを用いた。三段階法の定義は次である。第一段階として，初期標本数(m≧2)を前もって与え，各母集団から無作為に標本を抽出する。最小の標本数には未知な尺度母数が含まれているので，得られた無作為標本を用いて尺度母数に対する一時的な推定量を求める。この推定量を利用して第二段階での標本抽出のための標本数(T_i)を定義した。もし定義した標本数が初期標本数以下(T_i≦m)であれば，標本抽出を停止する。それ以外の場合(T_i>m)は各母集団から標本の大きさ(T_i-m)の無作為標本を抽出する。第二段階までに得られた無作為標本を利用して本格的な尺度母数の推定量を定義する。この推定量を使って第三段階での標本抽出のための標本数(N_i)を定義した。もし三段階目の標本数が第二段階目の標本数以下(N_i≦T_i)であれば, 第二段階で標本抽出を停止する。それ以外の場合(N_i>T_i)は各母集団から残りの大きさ(N_i-T_i)の無作為標本を抽出する。最終段階までに得られたすべての無作為標本に基づいて１次結合(δ)の推定量を定義した。このとき，平均標本数および定義した推定量に対するリスクの評価が問題になる。本研究で定義した三段階法と等価な三段階法を新たに定義し，この新しい三段階法に関する性質を用いて求めたい評価を得る方法を採用した。三段階目の標本の大きさに対する１次のモーメント，負の１次および２次のモーメントが評価に対して重要な役割を持つ。このためにはMukhopadhyay(1990)の定理が役立つ。定理の仮定が満たされることを確認してモーメントを求め, 与えられた上限(w>0)が十分小さいとき，平均標本数およびリスクの２次の漸近展開式を得ることができた。さらに, Isogai and Futschik(2010)が定義した純逐次法(M_i)との比較を行った。比較の対象は両平均標本数およびリスクである。純逐次法では適当な微調整因子を選ぶことにより近似的にリスクを上限以下にすることができた。一方、三段階法では近似的にリスクが上限を超えてしまうことが分かった。したがって，微調整因子を導入して修正三段階法を考えれば近似的にリスクを上限以下にできるのではないかと期待されるので，今後の研究課題である。三段階法に対する平均標本数を純逐次法のそれよりも小さくしようとすると，三段階法に対するリ

スクが純逐次法のそれよりも大きくなり，逆も言えることが分かった。したがって，２つの逐次手法に関してどちらが効率的であるかは本研究では断言できなかった。本研究は下記の共著論文として投稿中である。
Bounded risk estimation of a linear combination of location parameters in negative exponential distributions via three-stage sampling. Isogai and Futschik (2017)

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）
〔雑誌論文〕（計　１件）
① 磯貝英一，宇野力，二標本指数分布における三段階信頼区間問題，京都大学数理解析研究所　講究録（2017 年　査読なし）

〔学会発表〕（計　１件）
① 磯貝英一，宇野力，二標本指数分布における三段階信頼区間問題，2017年3月7日，京都大学数理解析研究所（京都市）

６．研究組織
(1)研究代表者
磯貝　英一（ISOGAI Eiichi）
新潟大学・自然科学系・フェロー
研究者番号：40108014