

**科学研究費助成事業 研究成果報告書**

平成 29 年 6 月 21 日現在

機関番号：21401

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2014～2016

課題番号：26400207

研究課題名(和文) 意思決定最適化理論における不等式双対化法の開発

研究課題名(英文) A study on inequality dualization method for decision making and optimization problems

研究代表者

木村 寛 (Yutaka, Kimura)

秋田県立大学・システム科学技術学部・教授

研究者番号：10315616

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,000,000円

研究成果の概要(和文)：意思決定および最適化における2次計画問題(主問題)に対する双対問題を導出する手法として新たに双対化法(dualization methods)を提示し、主問題・双対問題の最適解における最適点と最適値の依存関係を明らかにした。主な成果は以下の通りである。(1)双対化については(i)動的法、(ii)プラス・マイナス法、(iii)不等式法の3つの双対化手法を開発した。特に不等式法では算術平均・幾何平均不等式を多段的に活用して双対導出の一体系を構築した。(2)最適解の依存関係では最適点・最適値の三位一体構造として、フィボナッチ相補双対性、黄金相補双対性などを双対定理の型で示した。

研究成果の概要(英文)：In this research, we propose some dualization methods and investigate a mutual relationship between optimal points and optimal values for a class of quadratic programming problems, which include problems with decision making and optimization. We have discussed over and over again how to derive dual problems from primal problems and vice versa. And we have succeeded in deriving three dualization methods which are called dynamic dualization, plus-minus dualization, and inequality dualization. Moreover, it is shown that the optimal solutions for quadratic programming problem are characterized by the Fibonacci numbers or the Golden number. We have established some duality theorems for quadratic programming problem, which are called Fibonacci complementary duality, Golden complementary duality, and so on.

研究分野：最適化理論

キーワード：双対化 意思決定 最適化 2次計画

### 1. 研究開始当初の背景

最適化理論や意思決定論の問題では最適性条件や、双対性、アルゴリズム、解の存在など盛んに研究がされている。研究代表者らのグループでは意思決定論および、最適化問題における双対性や最適性条件に関する研究に取り組んできている。特に、双対性においては、一般的にラグランジュ双対や、Wolfe 双対、Mond-Weir 双対、Fenchel's 双対などが良く知られ用いられている。研究開始当初、研究代表者らのグループでは、主問題から双対問題、また双対問題から主問題を導出する双対化の手法に関して、一般のラグランジュ乗数とは異なった拡大ラグランジュ乗数とよばれる乗数を導入した双対化法の開発に着手していた。更に、平方完成の手法を主問題の変数列に応用して双対問題を導出する双対化手法の理論的な枠組みにも着手していた。この手法は主問題を同値な別問題に一度変換させることによって双対問題を導出する双対化手法である。これらの研究結果を踏まえて、研究者らのグループでは不等式を活用することによる新たな双対化手法の開発に着手しはじめた。更に、ある2次計画の配分過程においては最適点と最適値が共にフィボナッチ数で構成されることが明らかとなり、主問題と双対問題の最適解における依存関係についての調査にも着手しはじめた。

### 2. 研究の目的

本研究は最適化理論や意思決定論の問題に対する双対性に関して、主問題から双対問題または双対問題から主問題を導出する双対化手法の開発を目的としている。特に凸計画や2次計画の問題に対して、乗数列を導入した双対化を行う双対化手法や、主関数(primal function)と双対関数(dual function)を不等式に活用した主双対不等式(primal-dual inequality)の導出および、双対問題導出の手法および最適性条件の導出について不等式法による双対化手法(dualization method)を開発することが目的である。更に、2次計画の意思決定問題における主問題と双対問題の最適点と最適値に対する依存関係を明らかにすることを目的としている。

### 3. 研究の方法

(1) 意思決定や最適化に関わる凸計画問題や2次計画問題において、近年の双対化に関する手法の調査を行い、これまで研究者らのグループで研究を進めてきた双対化手法の概念を検証する。それらの過程から見出される新たな双対化の概念を調査・証明し、主問題から双対問題、双対問題から主問題の双対化が可能かどうか調査する。また弱双対定理や双対定理を証明し最適性条件の導出、更には最適点や最適解の再点検を行う。相加相乗平均不等式を用いた双対化の概念を新たに

構築し、不等式双対化法の開発を行う。具体的には研究者らのグループでこれまで得られてきた拡大ラグランジュ乗数列を用いる手法を乗数列手法として主問題に導入する不等式法の観点からさらに発展させ、主問題の問題群ごとにその導入手法を整理する。これは拡大ラグランジュ乗数列の手法のほか、相加相乗平均不等式による手法、また研究者らのグループで着手し始めた動的な双対化の手法を並列に研究しながら進める。

(2) 意思決定や最適化に関する2次計画問題においては、主問題と双対問題の間に、Fibonacci complementary duality とよばれる双対性や、Fibonacci shift duality とよばれる定理が成り立つことが示されている。

Fibonacci complementary duality :

(双対性) 主問題と双対問題の最適値は等しい。更に2つの最適値は初期値の2次関数でその係数は相隣なる Fibonacci 数の比である。

(Fibonacci) 主問題の最適点と双対問題の最適点とともに Fibonacci 数列の後ろ向き2段跳びである。

(相補性) 主問題の最適点と双対問題の最適点を交互に編むと後ろ向き Fibonacci 数列になる。

Fibonacci shift duality :

(双対性) 主問題と双対問題の最適値は等しい。更に2つの最適値は初期値の2次関数でその係数は3連 Fibonacci 数の比である。

(Fibonacci) 主問題の最適点と双対問題の最適点とともに Fibonacci 数列の後ろ向きである。

(shift) 双対問題の最適点は主問題の最適点を1段シフト(shift)した点になる。

これらの意思決定問題は配分過程などの応用として知られているが、これらの問題をより一般化することにより、新たな双対性が成り立つことが予測されている。評価概念や目的関数、制約条件をより一般化することによる弱双対定理や双対定理に関する双対性の証明を行う。具体的には2次評価を持つ意思決定過程の主問題を拡張させ、割引率を導入した割引過程をもつ意思決定問題について、相補双対性の双対定理を証明する。さらに研究者らのグループによるこれまでの研究で得られた2次計画問題の主問題と双対問題の間に見られるフィボナッチ双対性を更に拡張した黄金双対性に関する双対性の証明を行う。

(3) 上記(1)(2)での研究を踏まえて、研究代表者らのグループが構築を試みる双対化を通して主問題と双対問題の間に見られる主双対関係を定理として体系的にまとめる。また

評価法が与えられた主問題とその双対問題について、それぞれの最適点や最適値に関する最適解の数学的性質や構造を双対性に関する定理として示す。

#### 4. 研究成果

(1) 意思決定最適化問題の多段配分過程および2次計画問題に対して、双対問題導出のための双対化手法の調査および証明について主に以下の成果が得られた。意思決定最適化問題における主過程と双対過程における双対関係について、共役関数を導入した証明を提案し示すことができた。またこれらの結果から主関数(primal function)と双対関数(dual function)の間に主双対不等式を求めることに成功した。Youngの不等式を通して多段配分過程における主関数とその双対関数の間の双対関係を示した。特に2次評価の場合では主過程と双対過程の最適点と最適値はともにフィボナッチ相補等式(Fibonacci complementary equality)が成り立つことを示した。さらに主過程に割引がある場合の配分過程問題についても双対関係を示すことができた。意思決定における2次計画問題の主問題と双対問題の間に三位一体の相補性を持つ、黄金相補双対性(Golden complementary duality)が成り立つことを示した。

Golden complementary duality :

(双対性) 主問題と双対問題の最適値は等しい。更に2つの最適値は初期値の2次関数でその係数は黄金数の逆数である。

(Golden) 主問題の最適点と双対問題の最適点はともに1:型の黄金経路である。

(相補性) 主問題の最適点と双対問題の最適点を交互に編むと:1型の黄金経路である。

ただし、 $\phi$ は黄金数を表す。

ただし、 $\phi^{-1}$ は黄金数を表す。

さらに主問題と双対問題のそれぞれの最適点と最適値の数学的構造の関係についても調査し、最適値が最適点の成分に依存している関係を証明した。

(2) 双対問題導出の双対化手法の構築について主に以下の2点の成果が得られた。多段決定過程における主問題の双対化において、動的法(dynamic method)を提案しこの手法による双対化を証明した。この動的法は研究者らのグループで従来から開発してきた拡大ラグランジュ乗数列を導入した手法として開発された。意思決定の主過程と双対過程における双対関係について、上記(1)での成果で挙げた共役関数を導入した主双対不等式の導出を元にフェンシエル双対を応用して、プラス・マイナス法(plus-minus method)を証明した。この双対化は本研究当

初はフェンシエル法と呼んでいたが、プラス・マイナス法として成果をまとめることができた。

(3) 共役関数による主双対不等式および相加相乗平均不等式を用いた不等式法の双対化の成果を得た。さらに(2)の成果をもとに、動的法、プラス・マイナス法、不等式法による不等式双対化手法の双対化を得た。特に不等式法は主双対の両問題の導出および最適性条件の導出が同時に可能である特徴を持つ手法であることが示された。さらに黄金比で評価される黄金最適化問題においては、最適点および最適値が黄金数で与えられ、最適点は黄金経路であることも証明された。またGolden complementary duality, Golden shift dualityの双対性に関する定理の成果も得た。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計12件)

KIMURA Yutaka, IWAMOTO Seiichi, Quadratic Optimization under Semi-Fibonacci Constraint (II), Journal of the Operations Research Society of Japan, 60-2, 査読有, pp.78-90, 2017.

KIMURA Yutaka, UENO Takayuki, IWAMOTO Seiichi, Two Duals of One Primal, Bulletin of Informatics and Cybernetics, 48, 査読有, pp.63-82, 2016.

IWAMOTO Seiichi, KIMURA Yutaka, FUJITA Toshiharu, Complementary versus Shift Dualities, Journal of Nonlinear and Convex Analysis, 17-8, 査読有, pp.1547-1555, 2016.

岩本 誠一(IWAMOTO, Seiichi), 木村 寛(KIMURA, Yutaka), セミフィボナッチ制約下の2次最適化(I), 京都大学数理解析研究所講究録(不確実・不確定性の下での数理意思決定モデルとその周辺), 1990, 査読無, pp.65-72, 2016.

植野 貴之(UENO, Takayuki), 木村 寛(KIMURA, Yutaka), 岩本 誠一(IWAMOTO, Seiichi), 7つの双対問題, 京都大学数理解析研究所講究録(不確実・不確定性の下での数理意思決定モデルとその周辺), 1990, 査読無, pp.213-221, 2016.

IWAMOTO Seiichi, KIMURA Yutaka, Primal-Dual Inequalities through Conjugate Function, Proceedings of the 8<sup>th</sup> International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis, 査読有, pp.219-227, 2015.

岩本 誠一(IWAMOTO, Seiichi), 木村

寛 (KIMURA, Yutaka), 最適解--点と値--, 京都大学数理解析研究所講究録(不確実性の下での数理モデルとその周辺), 1939, 査読無, pp.228-237, 2015.

植野 貴之(UENO, Takayuki), 木村 寛 (KIMURA, Yutaka), 岩本 誠一 (IWAMOTO, Seiichi), 双対--動的 vs フェンシエル--, 京都大学数理解析研究所講究録(不確実性の下での数理モデルとその周辺), 1939, 査読無, pp.215-227, 2015.

岩本 誠一 (IWAMOTO, Seiichi), 木村 寛 (KIMURA, Yutaka), 藤田 敏治 (FUJITA, Toshiharu), Primal-Dual Optimization through A-G Inequality, 京都大学数理解析研究所講究録(非線形解析学と凸解析学の研究), 1963, 査読無, pp.122-129, 2015.

IWAMOTO Seiichi, KIMURA Yutaka, FUJITA Toshiharu, A Golden Complementary Duality in Quadratic Optimization Problem, Proceedings of the third Asian Conference on Nonlinear Analysis and Optimization, 査読有, pp.109-119, 2014.

岩本 誠一 (IWAMOTO, Seiichi), 木村 寛 (KIMURA, Yutaka), 藤田 敏治 (FUJITA, Toshiharu), 主双対: ダヴィンチ・コード, 日本オペレーションズ・リサーチ学会(動的計画法の新展開), 59-7, pp.359-363, 2014.

岩本 誠一 (IWAMOTO, Seiichi), 木村 寛 (KIMURA, Yutaka), 藤田 敏治 (FUJITA, Toshiharu), A Dynamic Duality through Young's Inequality, 京都大学数理解析研究所講究録, 1912, 査読無, pp.10-16, 2014.

[学会発表](計 17 件)

岩本 誠一 (IWAMOTO, Seiichi), 木村 寛 (KIMURA, Yutaka), Nonhomogeneous Semi-Fibonacci Programming, 第 21 回情報・統計科学シンポジウム, 2016.12.2, 九州大学.

岩本 誠一 (IWAMOTO, Seiichi), 木村 寛 (KIMURA, Yutaka), セミフィボナッチ計画法 --不等式アプローチ--, RIMS 研究集会「確率環境下における数理モデルの理論と応用」, 2016.11.9 ~ 11.11, 京都大学.

IWAMOTO Seiichi, KIMURA Yutaka, Semi-Fibonacci Programming--Golden Identical Duality--, The Fifth Asian Conference on Nonlinear Analysis and Optimization (NAO-Asia2016), 2016.8.1 ~ 8.6, Niigata, Japan.

木村 寛 (KIMURA, Yutaka), 岩本 誠一 (IWAMOTO, Seiichi), Is Golden path optimal?, 日本数学会, 2016.3.16 ~ 3.19, 筑波大学.

岩本 誠一 (IWAMOTO, Seiichi), 木村 寛 (KIMURA, Yutaka), On semi-Fibonacci programming --duality--, 第 20 回情報・統計科学シンポジウム, 2015.12.4, 九州大学.

岩本 誠一 (IWAMOTO, Seiichi), 木村 寛 (KIMURA, Yutaka), Three Dualizations--two-variable optimization--, 第 20 回情報・統計科学シンポジウム, 2015.12.4, 九州大学.

植野 貴之(UENO, Takayuki), 木村 寛 (KIMURA, Yutaka), 岩本 誠一 (IWAMOTO, Seiichi), 7つの双対問題, RIMS 研究集会「不確実・不確定性の下での数理意思決定モデルとその周辺」, 2015.11.11 ~ 11.13, 京都大学数理解析研究所.

岩本 誠一 (IWAMOTO, Seiichi), 木村 寛 (KIMURA, Yutaka), セミフィボナッチ制約下の 2 次最適化 (I), RIMS 研究集会「不確実・不確定性の下での数理意思決定モデルとその周辺」, 2015.11.11 ~ 11.13, 京都大学数理解析研究所.

UENO Takayuki, KIMURA Yutaka, IWAMOTO Seiichi, Seven Duals, The 27th European Conference on Operational Research (EURO2015), 2015.7.12 ~ 7.15, Glasgow, Scotland.

KIMURA Yutaka, UENO Takayuki, IWAMOTO Seiichi, Three Dualizations, The 27th European Conference on Operational Research (EURO2015), 2015.7.12 ~ 7.15, Glasgow, Scotland.

岩本 誠一 (IWAMOTO, Seiichi), 木村 寛 (KIMURA, Yutaka), 最適点-第 1 成分--, 日本オペレーションズ・リサーチ学会 2015 春季研究発表会, 2015.3.26 ~ 3.27, 東京理科大学.

岩本 誠一 (IWAMOTO, Seiichi), 木村 寛 (KIMURA, Yutaka), Is Da Vinci Code in itself Optimal?, 日本数学会, 2015.3.21 ~ 3.24, 明治大学.

岩本 誠一 (IWAMOTO, Seiichi), 木村 寛 (KIMURA, Yutaka), 点と値-最適解--, 第 19 回情報・統計科学シンポジウム, 2014.12.5, 九州大学.

岩本 誠一 (IWAMOTO, Seiichi), 木村 寛 (KIMURA, Yutaka), 最適解--点と値--, RIMS 研究集会「不確実性の下での数理的モデルとその応用」, 2014.11.12 ~ 11.14, 京都大学数理解析研究所.

IWAMOTO Seiichi, KIMURA Yutaka, FUJITA Toshiharu, Primal-Dual Optimization through A-G Inequality, The International Workshop on Nonlinear Analysis and Convex Analysis, Research Institute for Mathematical Sciences, 2014.8.19 ~ 8.21, Kyoto University.

UENO Takayuki, KIMURA Yutaka, IWAMOTO Seiichi, The Second Dual of a Primal,

The 20<sup>th</sup> Conference of the International Federation of Operational Research Societies(IFORS2014), 2014.7.13 ~ 7.18, Barcelona, Spain.

KIMURA Yutaka, IWAMOTO Seiichi, Primal Function and Dual Function through Conjugation, The 20<sup>th</sup> Conference of the International Federation of Operational Research Societies(IFORS2014), 2014.7.13 ~ 7.18, Barcelona, Spain.

## 6 . 研究組織

### (1)研究代表者

木村 寛 (KIMURA, Yutaka)

秋田県立大学・システム科学技術学部・教授

研究者番号：10315616

### (2)研究分担者

岩本 誠一 (IWAMOTO, Seiichi)

九州大学・経済学研究院・名誉教授

研究者番号：90037284