様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　(共通)

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ３０ 年　 ４ 月 １９ 日現在

機関番号：２４４０３
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2014～2017
課題番号：２６４００２０９

研究課題名（和文）共形ガリレイ群の表現論と数学的・物理的応用

研究課題名（英文）Representation theories of the conformal Galilei groups and their mathematical and physical applications

研究代表者
会沢　成彦（Aizawa, Naruhiko）

大阪府立大学・理学（系）研究科（研究院）・教授

研究者番号：７０２６４７８６

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,900,000円

研究成果の概要（和文）：相対性理論を考慮しない場合，時空の変換（特に時空の拡大縮小を含むような変換）はより豊かな数学的構造を持つことが知られている．しかし，この変換の集合（共形ガリレイ群という）の数学的な側面も，物理的な応用も十分には研究されてこなかった．本研究では共形ガリレイ群の数学的な側面の研究として，既約表現の分類や超群，および次数付き群への拡張に多くの成果を得た．応用としては，これらの群を対称性として持つ微分方程式の導出をおこない，スピン1/2の粒子に対する方程式がそのような対称性を持つことを示した．また，クリフォード代数との関連を明らかにした．

研究成果の概要（英文）： Spacetime symmetries are very fundamental notion in physics. If Einstein's relativity is not taken into account, the spacetime symmetries, which include scale transformation, are richer mathematical structure. The mathematical structure is nowadays called "conformal Galilei groups (CGG)". Despite their physical importance, they are not studied thoroughly yet. The purpose of the present project is to study CGG and their extensions, such as super or generalized super, extensively and apply the results to other fields of mathematics and theoretical physics.
Our main achievements are summarizes as follows: (i) introduction new extensions of CGG, (ii) classification of irreducible representations, (iii) derivation of differential equations whose symmetry is given by CGG. Especially, it is revealed that the wave equation of spin 1/2 particle has a extended CGA symmetry, (iv) a relation between generalized super CGG and the Clifford algebras is clarified.

研究分野：数理物理

キーワード：共形対称性　リー群・リー代数　超群・超代数とその拡張　表現論　微分方程式の対称性

１．研究開始当初の背景

共形ガリレイ群と呼ばれるリー群が近年物理学で話題になっている．これはアインシュタインの相対性理論を考慮しない場合の時空の対称性を与える群であり，古典型や例外型とは異なるある種の有限次元リー群になっている．また，時空の次元を固定しても，共形がリレイ群はただひとつに決まらず，ひとつのパラメーターで指定される無限個の族をなしている．

このように共形ガリレイ群は物理的に重要であり，数学的には古典型・例外型の群より豊かな構造を持っているにもかかわらず，共形ガリレイ群の研究，特にその表現論とその応用に関する研究はほとんどなされていなかった．

また，数学的にも物理的にも面白い問題として群を超群などへ拡張し，その表現や応用を調べるという問題がある．これらに関しても十分な研究がなかったのが研究開始当初の実情であった．

２．研究の目的

共形ガリレイ群のリー代数に関しては 2011-2013 年度に受けた補助金で研究を行い，表現論や応用に関して多くの知識を蓄積している．本研究課題はそれを継続しさらに発展させることを目指したものである．具体的には，(i) 共形ガリレイ群とそのリー代数の表現を具体的に構成し，既約表現を分類する，(ii)それらと直交多項式や微分方程式，さらには，古典・量子物理系との関連を明らかにする， (iii)共形ガリレイ群のリー代数を無限次元，あるいは超代数に拡張したものの表現についても同様の研究を行う，という研究をとおして，共形ガリレイ群の表現論という未開拓分野を切り開き，かつ，数学の他分野や物理学との関連を明らかにすることを目指している．

３．研究の方法

本研究課題は数学と物理にまたがる理論研究であり，大規模な計算機や施設を必要としない．必要なものは文献とパソコン上で動く数式処理ソフトのみである．表現論を数学の他分野や物理に応用するには表現が具体的に求まっていなければならない．また，同値な表現であっても表現空間が異なると，可能な応用も異なってくる．

そのため，本研究では共形ガリレイ群とそのリー代数の表現の具体例をできるかぎりたくさん作ることが重要なポイントとなる．表現の具体形を用いて，それがどのような応用の可能性を持つかを個別に検討するという方法をとる．また，応用の際に必要となる計算手法の開発や関連分野の開拓も行っていく．

４．研究成果

共形ガリレイ群の表現論と微分方程式の関連について大きな成果を得た．また，共形ガリレイ群を $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ 次数付き超群に拡張したものが物理的に重要な役割を果たす可能性を明らかにし，$\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ 次数付きリー代数のような拡張されたリー超代数についてさらに研究するべきであるという見解にいたった．これらについて順次解説する．

まず，前述のように共形ガリレイ群はある種のリー群の総称であり，個々の共形ガリレイ群はふたつのパラメーター(d,ℓ)により指定される．d は非相対論的な空間の次元であり，正の整数値をとる．ℓは正の整数値または半整数値(= 1/2, 3/2,…)をとり「スピン」と呼ばれているが，現実の世界にある粒子のスピンとは無関係である．また，ℓが整数の場合と半整数の場合では共形ガリレイ群の構造に大きな違いがあるので，それぞれの場合を別個に取り扱う必要がある．

(1) 表現論と線型微分方程式　その１

リー群の表現を求めるひとつの方法としてまずリー代数の表現を求める方法がある．前回の補助金による研究の成果として，ヴァーマ加群を用いる方法は共形ガリレイ代数の場合にもうまく適用できること，表現論の情報から共形ガリレイ対称な線型微分方程式を導出できることが明らかになっている．前回の補助金では d=1 かつℓが半整数の場合に共形ガリレイ代数の既約表現の完全な分類を行い，その表現の下で対称な偏微分方程式の階層があることを導いた．

本研究課題ではその続きとして，d=1 かつℓが整数の場合の既約表現の分類を試みた．この場合はℓが半整数の場合よりはるかに複雑となり，既約表現の完全な分類は達成できず部分的な結果にとどまった．しかし，その情報はℓが整数である共形ガリレイ群の下で対称な偏微分方程式を導くには十分であり，（ℓが半整数の場合とは異なり）対称な線型微分方程式の階層が複数あることを明らかにし，その具体的を与えた．なお，既約表現の完全な分類はその後 Krizka と Somberg が我々の研究を引き継ぐ形で完成させた．

(2) 表現論と線型微分方程式　その２

d=1 かつℓが半整数の共形ガリレイ群を対称性として持つ新しい 2 階線型偏微分方程式を導出した．これは共形ガリレイ代数のどの基底を対角化する表現を採用するかという問題であり，ヴァーマ加群を用いた方法とは異なる微分方程式を得ることができる．

まずは，前回の補助金の期間に得ていた表現を元にして，共形対称な量子力学でよく用いられる方法により，共形ガリレイ代数の新しい表現を作り出した．この表現に

よる変換で不変な微分方程式は，微分方程式のリー対称性で用いられる方法を一般化したものにより導出した．得られた微分方程式は，ℓ=1/2 の場合は調和振動子に対するシュレーディンガー方程式になっており，量子力学で古くから知られている事実を再現する．ℓが大きくなるに従い独立変数の数が増え調和振動子からずれていく．時間に相当する変数を固定したときの演算子は量子力学のハミルトニアンにあたり，興味深いことにこのハミルトニアンの固有値はリー超代数の表現論により与えられる．このように微分方程式を媒介としてリー群とリー超群の間に関係を付けることができた事実は注目に値する．

この事実からの自然な発想として，リー超群とそれをさらに拡張したものが微分方程式を媒介として関係するのではないかと思える．我々はこのようにしてリー超群やリー超代数を拡張したものが微分方程式と関連するのではないかと考えるようになった．後述するように，この考えはレヴィ=レブロン方程式の $Z_2\times Z_2$ 対称性として結実し，我々を拡張されたリー超群の研究へと向かわせることとなった．

(3) 表現論と線型微分方程式　その 3

d=2 かつℓが整数である共形ガリレイ群は他とは異なる特徴的な構造を持っている．(1)(2)で述べた研究の続きとして，このタイプの共形ガリレイ群を対称性として持つ偏微分方程式の導出を試みた．方法は(2)と同様である．つまり，ヴァーマ加群による表現を元にして量子力学の方法により新しい表現を作る．その表現による変換で不変な微分方程式を導出するという手順であり，これにより新たな共形ガリレイ対称な 2 階の偏微分方程式を得ることができた．これはヴァーマ加群による方法で以前に求めたものとは異なり，時間に相当する変数を固定した場合のハミルトニアンの固有値が離散的になる．

(4) 非線型偏微分方程式

数学においても物理においても非線型偏微分方程式の重要さは言うまでもない．共形ガリレイ群はどのような非線型微分方程式の対称性になりうるかは興味ある問題である．そこで共形ガリレイ群の表現としてヴァーマ加群によるものを採用し，この表現による変換のもとで対称となる 2 階非線型偏微分方程式のもっとも一般的な形を導出するという問題を考えることにした．

導出の手法としては微分方程式の対称性の理論でよく知られたものを使うことにした．d=1 かつℓが半整数の場合を研究し，各々のℓに対して共形ガリレイ不変な 2 階非線型微分方程式の最も一般的な形を導出することができた．ℓの値が大きくなるにつれ独立変数の数が増加することにより，ℓが 3/2 より大きい場合とそうでない場合には微分方程式の形に大きな違いがでることが明らかになった．この研究では，微分方程式のもっとも一般的な形を求めたため，それらは任意関数をひとつ含んでいる．その関数形を定めることによりさまざまな微分方程式が得られるわけであるが，どのような関数形を取ることにより数学的，あるいは物理的に有意な微分方程式が得られるかについては今後の検討課題として残っている．

(5) レヴィ=レブロン方程式と共形ガリレイ群の拡張

(2)で述べたように微分方程式を媒介として超群とそれを拡張したものが関係つくのではないかと予想した．まずは超群を対称性として持つ微分方程式に関する先行研究を調査したところ，レヴィ=レブロン方程式が共形ガリレイ群を超群に拡張したものを対称性として持つであろうという予想があることがわかった．レヴィ=レブロン方程式はスピン 1/2 を持つ粒子に対する非相対論的な量子力学の波動方程式であり，物理的に重要な方程式である．そこでレヴィ=レブロン方程式の対称性を詳しく調べることにした．3 次元以下の空間上で定義されたレヴィ=レブロン方程式を調べたところ，予想通りにℓ=1/2 の共形ガリレイ超群を対称性として持つことが明らかになり，先行研究における予想が正しいことを証明した．さらに，レヴィ=レブロン方程式はより大きな対称性を持っており，それはℓ=1/2 の共形ガリレイ群を $Z_2\times Z_2$ 次数付き超群に拡張したもので与えられることが明らかになった．

$Z_2\times Z_2$ 次数付き超群とそのリー代数は 1978 に導入されたものであり，（いくつかの試みはあるものの）物理的に有意な応用は知られていなかった．そのため，その数学的研究も超群やリー超代数に比べて大きく立ち遅れている．本研究の成果は，$Z_2\times Z_2$ 次数付き超群は物理的に無意味なものではない，という例を提供しているとともに，他の力学系も $Z_2\times Z_2$ 次数付き超群と関連があるだろうことを示唆している．実際，調和振動子ポテンシャルに対する超対称量子力学のシュレーディンガー方程式が $Z_2\times Z_2$ 次数付き超群を対称性として持つことも明らかにした．

以上の結果から，$Z_2\times Z_2$ 次数付き超群をはじめとする「拡張されたリー超群」の数学的・物理学的側面は重要な研究課題であると考えるに至り，当初の研究計画に加え拡張されたリー超群についても研究をすることとした．特に，研究期間の最終年度はこの問題に多くの時間を費やした．

また，レヴィ=レブロン方程式に関しては次のような結果も得ている．量子力学の基本方程式であるシュレーディンガー方程式，クライン=ゴルドン方程式，ディラック方程式は時空の対称性を与える群の表現論から直接導出されることが知られている．レヴ

ィ=レブロン方程式はこれらと同列にある方程式であるにも関わらず，時空の対称性であるガリレイ群の表現論からは導出できないことが 1970 年代から認識されていた．しかし，ℓ=1/2 の共形ガリレイ超群の部分群を考えることにより，表現論からレヴィ=レブロン方程式が直接導出されることを示した．

(6) 拡張されたリー超群

レヴィ=レブロン方程式の対称性になっていたのは超対称演算子をひとつもつ(d, ℓ)=(1,1/2)の共形ガリレイ超群を $Z_2\times Z_2$ 次数付き超群に拡張したものであった．以下では超対称演算子の数を N で表すことにする．つまり，レヴィ=レブロン方程式の場合は N=1 の拡張されたリー超群となる．我々の過去の研究で d=1 の共形ガリレイ代数は N=2 の超代数に拡張できることが示されており,拡張された代数の D 加群表現も求められている．そこで，ℓ=1/2, N=2 の共形ガリレイ超代数を $Z_2\times Z_2$ 次数付き超代数に拡張し，その表現を求めるという問題を考えることにした．(ℓ,N)=(1/2,2)の場合には 2 種類の異なる共形ガリレイ超代数が存在し，いずれの場合も $Z_2\times Z_2$ 超代数に拡張することに成功し，拡張されたものの D 加群表現を求めることができた．また，グラスマン代数の微積分を $Z_2\times Z_2$ 次数付き代数に拡張し，それを用いて $Z_2\times Z_2$ 共形ガリレイ超代数のベクトル場表現を定式化した．

共形ガリレイではないが，拡張された超代数に関しては次のような結果も得ている．

① クリフォード代数が拡張されたリー超代数の構造を持っていることを示し，任意のリー超代数とクリフォード代数のテンソル積をとることにより，任意のリー超代数から拡張されたリー超代数を作れることを示した．

② 拡張されたリー超代数の簡単な例をひとつとり，ヴァーマ加群による表現を考察した．その例ではヴァーマ加群がうまく定義できないことを示し，この問題を回避するためのトリックを考案し，ヴァーマ加群型の表現を定義し，その既約性を議論した．その副産物として，考えている代数が生成する変換のもとで不変な偏微分方程式を導出した．ひとつの例での研究であるが，どのようなことは他の拡張されたリー超代数に対しても成立する．

(7) 無限次元リー超代数への拡張

共形ガリレイ群のリー代数は定義より有限次元であるが，それを無限次元リー代数に拡張できることが知られている．無限次元版の共形ガリレイ代数はヴィラソロ代数を部分代数として持っており，無限次元の共形ガリレイ代数はヴィラソロ代数の自然な拡張になっている．ヴィラソロ代数は数理物理におけるもっとも基本的な代数である．d=ℓ=1 の無限次元共形ガリレイ代数は重力の理論で古くから BMS 代数という名で知られているものになっており，物理的な興味もある．また,ヴィラソロ代数の拡張の研究は興味ある数学の問題として古くから研究されている．

共形ガリレイ超代数の無限次元リー代数への拡張も同様に可能であり，ヴィラソロ超代数を部分代数として含んでおり興味深いものである．しかし，これらの数学的・物理的意味はあまり明らかになっていない．そこで，d=1 の共形ガリレイ超代数を無限次元に拡張したもの(ℓは任意)に対し，数理物理的な応用を考えた際に重要な役割を果たすであろういくつかの点を検討し，次のような結果を得た．① 可能な中心拡大を分類し，超対称部分の中心拡大はℓ=1 の時のみ可能であることを示した．これ以降の結果は中心拡大された代数に対するものである．② ベクトル場表現を導出した.超代数なのでグラスマン数を用いた表現になるが，グラスマン数がひとつの場合とふたつの場合が可能であることを示した．③ 共形ガリレイ超代数の正則双対を考えることにより余随伴表現と呼ばれる表現を構成した．④ 共形場の理論で重要な役割を果たす演算子積展開を，頂点作用素代数の方法を用いて構成した．

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　16 件）

① N. Aizawa, Y. Kumura, J. Segar, Representations of ℓ-conformal Galilei algebra and hierarchy of invariant equation,
Journal of Physics: Conference Series, 512 巻, (2014) 12015 (9 pages), 査読有.
DOI: 10.1088/1742-6596/512/1/012015

② N. Aizawa, Y. Kimura and J. Segar, Representation of conformal Galilei algebra and invariant equations,
JPS Conference Proceedings, 1 巻 (2014) 013018 (4 pages) 査読有.
DOI: 10.7566/JPSCP.1.013018

③ N. Aizawa, R. Chandrashekar, J. Segar, Lowest weight representations, singular vectors and invariant equations for a class of conformal Galilei algebras.
Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications, 11 巻, (2015) 002 (19 pages) 査読有.
DOI: 10.3842/SIGMA.2015.002

④ N. Aizawa, Z. Kuznetsova and F. Toppan, ℓ-Oscillators from second-order invariant PDEs of the centrally extended Conformal Galilei Algebras.
Journal of Mathematical Physics, 56 巻

(2015) 031701 (14 pages) 査読有.
DOI: 10.1063/1.4908232
⑤ N. Aizawa and V. K. Dobrev,
Intertwining operator realization of anti de Sitter holography.
Reports on Mathematical Physics, 75巻 (2015) 179-197, 査読有.
DOI: 10.1016/S0034-4877(15)30002-1
⑥ N. Aizawa and T. Kato,
Centrally extended conformal Galilei algebras and invariant nonlinear PDEs.
Symmetry, 7巻 (2015) 1989-2008, 査読有.
DOI: 10.3390/sym7041989
⑦ N. Aizawa, Z. Kuznetsova and F. Toppan,
Invariant PDEs with two-dimensional exotic centrally extended conformal Galilei symmetry.
Journal of Mathematical Physics, 57巻 (2016) 041701 (10 pages) 査読有.
DOI: 10.1063/1.4945336
⑧ N. Aizawa, R. Chandrashekar, J. Segar,
Representations of conformal Galilei algebra with integer spin and an application,
Journal of Physics: Conference Series, 597巻 (2015) 012008 (10 pages) 査読有.
DOI: 10.1088/1742-6596/597/1/012008
⑨ N. Aizawa, Z. Kuznetsova and F. Toppan,
Invariant PDEs of Conformal Galilei Algebra as deformations: cryptohermiticity and contractions.
Progress of Theoretical and Experimental Physics, 2016巻 (2016) 083A01 (18 pages) 査読有.
DOI: 10.1093/ptep/ptw100
⑩ N. Aizawa and J. Segar,
Aspects of infinite dimensional ℓ-super Galilean conformal algebra.
Journal of Mathematical Physics, 57巻 (2016) 123502 (11 pages) 査読有.
DOI: 10.1063/1.4972023
⑪ N. Aizawa, Z. Kuznetsova, H. Tanaka and F. Toppan,
$Z_2 \times Z_2$-graded Lie symmetries of the Levy-Leblond equations.
Progress of Theoretical and Experimental Physics, 2016巻 (2016) 123A01 (26 pages) 査読有.
DOI: 10.1093/ptep/ptw176
⑫ N. Aizawa, Z. Kuznetsova, H. Tanaka and F. Toppan,
Generalized supersymmetry and Levy-Leblond equation,
in ``Physical and Mathematical Aspects of Symmetries,'' J.-P. Gazeau, S. Faci, T. Micklitz, R. Scherer, F. Toppan (editors), Springer (2017) 査読有.
DOI: 10.1007/978-3-319-69164-0_11
⑬ N. Aizawa and J. Segar,
$Z_2 \times Z_2$ generalizations of N=2 super Schrodinger algebras and their representations,
Journal of Mathematical Physics, 58巻 (2017) 113501 (14 pages) 査読有.
DOI: 10.1063/1.4986570
⑭ N. Aizawa, Z. Kuznetsova and F. Toppan,
The quasi-nonassociative exceptional F(4) deformed quantum oscillator.
Journal of Mathematical Physics, 59巻 (2018) 022101 (13 pages) 査読有.
DOI: 10.1063/1.5016915
⑮ N. Aizawa,
Verma modules over a $Z_2 \times Z_2$ graded superalgebra and invariant differential equations.
Scientiae Mathematicae Japonicae, 31巻 (2018) 2018-4 (10 pages) 査読有.
⑯ N. Aizawa,
Generalization of superalgebras to color superalgebras and their representations.
Advances in Applied Clifford Algebras, 28巻 (2018) 28 (14 pages) 査読有.
DOI:

〔学会発表〕(計　9件)

① N. Aizawa, R. Chandrashekar, J. Segar,
Representations of conformal Galilei algebra with integer spin and an application,
XXX International Colloquium on Group-Theoretical Methods in Physics, 2014年
② 会沢成彦,
リー代数の表現論による共形ガリレイ不変な微分方程式の導出,
国際数理科学シンポジウム, 2015年
③ 会沢成彦, V.K. Dobrev,
So(3,2)の表現論とbulk-boundary対応,
日本物理学会年次大会, 2015年
④ N. Aizawa, Z. Kuznetsova, F. Toppan,
共形ガリレイ不変な偏微分方程式と実固有値を持つ非エルミート演算子,
日本物理学会秋季分科会, 2015年
⑤ 会沢成彦, 加藤忠徳,
共形ガリレイ対称な非線形微分方程式,
日本物理学会年次大会, 2016年
⑥ N. Aizawa, Z. Kuznetsova, H. Tanaka, F. Toppan,
Generalized supersymmetry and Levy-Leblond equation,
XXXI International Colloquium on Group Theoretical Methods in Physics,
2016年
⑦ N. Aizawa,
Generalization of superalgebras to color superalgebras and their representations,
The 11th International Conference on Clifford Algebras and Their Applications in Mathematical Physics, 2017年

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織

(1)研究代表者
会沢　成彦（AIZAWA, Naruhiko）
大阪府立大学・理学系研究科・教授
研究者番号：70264786

(4)研究協力者
Phillip S. Isaac,
Jambulingam Segar