2版

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ３０ 年　 ６ 月 １４ 日現在

機関番号：３２６８３

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2014～2017

課題番号：２６４００２５６

研究課題名（和文）局所化の方法を用いた低次元ゲージ理論の研究

研究課題名（英文）Researches into lower dimensional gauge theories by using the localization method

研究代表者

太田　和俊（OHTA, Kazutoshi）

明治学院大学・法学部・准教授

研究者番号：８０４４２９３７

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,300,000円

研究成果の概要（和文）：　ボーズ粒子とフェルミ粒子入れ替えに対応する対称性である超対称性を持つ理論を経路積分によって量子化する際、ボーズ粒子からの寄与とフェルミ粒子からの寄与が打ち消し合い、経路積分を厳密に遂行できる場合がある。この現象または手法を「局所化」といい、超対称性を持つ理論において物理量を厳密に計算するための有効かつ重要な計算方法となっている。
　我々は超対称ゲージ理論、特に0+1次元のクイバー超対称量子力学と2次元離散空間上のヤン=ミルズ理論に対してこの局所化の方法を用いた解析を行い、厳密な物理量の計算通じて理論の構造に関する深い理解を得た。

研究成果の概要（英文）： In quantization of supersymmetric theory, where there exists an exchange symmetry between boson and fermions, we can evaluate exactly the path integral by a cancellation of the contribution from boson and fermions. This phenomenon or method is called the “localization”, which is effective and important method in evaluating observables of the supersymmetric gauge theories.
 We applied this localization method for (0+1)-dimensional quiver quantum mechanics and 2-dimensional discretized Yang-Mills theory and obtained deeper understandings about theoretical structure of lower dimensional supersymmetric gauge theories.

研究分野：素粒子論

キーワード：超対称ゲージ理論　超弦理論　局所化　クイバー量子力学　格子ゲージ理論　超対称指数　超重力理論　行列模型

１．研究開始当初の背景
　ある種の超対称性を持つ場の理論に対しては、「局所化」と呼ばれる計算手法が適用可能となる。局所化とは、場の理論において無限自由度を持つ経路積分が超対称性によって有限自由度まで簡約化される現象であり、局所化の方法を用いると超対称場の理論において物理量の厳密な評価が可能となる。近年、この局所化の計算手法が発展・確立し、超対称ゲージ理論における様々な問題に応用されつつあったため、超対称ゲージ理論や超弦理論の本質のさらなる理解のためには、この局所化の方法の適用範囲や有効性をより明確にすることが必要であった。
　また、超対称ゲージ理論を格子などの離散空間上で定義し、数値計算を用いようとすると、符号問題などフェルミオン場の存在に起因する問題が生じていた。これら、超対称理論における数値計算上の問題の理論的な本質を理解することも重要な問題として存在していた。

２．研究の目的
　本研究では、この局所化の方法を超対称ゲージ理論、特に低次元の場の理論に適用し、超弦理論や場の理論における諸問題について、新しい知見を得ようとするものである。

(1) N=4 の超対称性を持つ、超対称量子力学においては、その理論の超対称指数を局所化の方法を用いて厳密に計算することにより、対応する重力側の解釈としての超対称粒子の結合状態の性質を明らかにする。特に、超対称粒子の結合状態数が、理論のパラメータを変化させた場合にある値で急激に変化する「壁越え　(wall-crossing)」と呼ばれる現象が、局所化の方法の計算においてどのような形で現れるかを明らかにする。

(2) 2 次元の局面(Riemann 面)を分割し、離散化した空間上で定義された N=(2,2)の超対称性を持つ理論に対しては、このような離散空間上の理論でも局所化の方法が有効な計算方法であるかを調べ、理論的な側面からどのような知見が得られるかを明らかにする。また、理論的に理解された結果が実際の数値計算において実際に機能するのか、どのような現れ方をするのかを明確にする。

３．研究の方法
(1) N=4 超対称量子力学の Lagrangian を超対称電荷の一つを使って、完全(exact)な形式で記述し、局所化の方法を使いやすい形に構成する。局所化の方法は、経路積分時に超対称変換等の固定点に場の値が局所化することがその名前の由来であるが、超対称量子力学においてその固定点を完全な形で分類し、超対称指数を厳密に評価する。その際、経路積分は最終的に複素平面上の留数積分に帰着されるが、その積分経路が理論のパラメータに対する条件としてどのように選択されるか、物理的、数学的な立場から考察を加え、その意味を吟味する。

(2) そもそも 2 次元の局面を一般的に分割した離散空間上で超対称ゲージ理論を構成した理論が研究開始当初には存在しなかったため、超対称ゲージ理論を正方格子(トーラス)上で定義した杉野模型を参考にしつつ、離散空間上の超対称ゲージ理論の拡張と一般化を行う。その上で、その理論の持つ性質、特に局所化を適用するために必要な理論形式に沿った形で構成可能かどうかを吟味する。局所化の方法が適用可能であると明らかになった場合には、離散空間上の理論においても局所化の方法を適用し、連続空間上の超対称ゲージ理論の結果と比較する。
　これら、2 次元離散空間上の超対称ゲージ理論の性質が局所化の方法で明らかになった部分に対して、数値計算によるシミュレーションでその理論的な性質について確認する。

４．研究成果
(1) 超対称クイバー量子力学における厳密な結果
　ゲージ群が直積であり、ゲージ群間に双基本表現の物質場が存在するクイバー量子力学において、分配関数の値を局所化の方法を用いて厳密に計算した。分配関数の値は超対称指数と呼ばれ、量子論的束縛状態の自由度の数を表すが、この状態数が Fayet-Iliopoulos(FI)パラメータと呼ばれる理論のパラメータの値に応じて不連続に変化することを示した。
　この不連続な状態数の変化は「壁越え(wall-crossing)」現象と呼ばれるが、この壁越え現象は超対称量子力学の分配関数を経路積分で評価する際に、局所化によって複素平面上の留数積分に還元される過程で生じる。留数積分における積分径路は経路積分全体が矛盾なく定義されるよう選ぶ必要があるが、その選び方が FI パラメータの値に応じて不連続に変化し、それが壁越え現象を引き起こすことがわかった。この壁越え現象を局所化の方法を使って初めて明確に示すことができた。
　一方で、このクイバー超対称量子力学の超対称指数は重力側の解釈として、N=2 超重力理論における多体ブラックホール(超対称粒子)の結合状態の状態数としても解釈できる。この解釈に沿って我々の結果を検討すると全ての場合において矛盾の無い解釈が得られ、局所化を使った我々の方法の正確さを示すことができた。

(2) 超対称クイバー量子力学におけるクー

ロン相での局所化

局所化の方法を使って超対称クイバー量子力学を厳密に評価することに成功したが、その局所化の計算はヒッグス相と呼ばれる、物質場が真空期待値を持つ場合における評価であった。一方、クイバー量子力学を超重力理論における超対称粒子の結合状態とする解釈においては、ゲージ場を含むベクトル多重項中のスカラー場が期待値を持つクーロン相での解釈が重要となる。

この観点に基づき、超対称クイバー量子力学をクーロン相において局所化の方法による再評価を行った。まず、クーロン相ではヒッグス相における局所化と固定点の評価が大きく異なり、その固定点の数がクーロン相ではヒッグス相に比べ、極端に少なくなる。クーロン相における固定点での分配関数(超対称指数)の値も一見大きく異なるように見えるが、固定点からの寄与を最終的に全て足し合わせるとクーロン相での計算とヒッグス相での計算が完全に一致することがわかった。これはクーロン相もヒッグス相も味方は異なっていても同じ理論を異なるパラメータ領域で経路積分しているため当然の結果とも言えるが、超重力理論における超対称粒子の結合状態(閉弦理論)と D ブレインの結合状態(開弦理論)が、クーロン相とヒッグス相それぞれの計算と対応しており、閉弦と開弦の間の双対性を局所化の立場から明らかにした結果とも言える。

また、クーロン相における局所化では、元々線形シグマ模型であったクイバー量子力学を非線形シグマ模型として解釈しているとも言うことができ、その非線形シグマ模型の標的空間の観点から、クーロン相における局所化の固定点の持つ物理的意味も明らかになった。

(3) 離散化された空間上でのゲージ理論における厳密な計算

超対称ゲージ理論を数値計算等で評価するため、正方格子等の離散化された空間上で定義する様々な試みが行われているが、並進対称性が重要な意味を持つ超対称理論を離散空間上で定義するのは一般に困難である。この困難を避けるため超対称理論を位相的ツイストと呼ばれる手法で変形した物を離散空間上で定義する方法が提案され、その一つとして 2 次元 N=(2,2)超対称ゲージ理論のいわゆる杉野模型と呼ばれるものがある。

我々は杉野模型を拡張し、正方格子と限らずに一般の 2 次元面(Riemann 面)を分割し、その離散空間上で超対称ゲージ理論を構成した。杉野模型のように位相的ツイストを施した理論では、超対称電荷のうちスカラー的に振る舞うものが生じるため、一般的な離散空間上で定義するのが容易な上、Lagrangian がスカラー超電荷を用いて完全な形に書け、局所化の方法が適用できるという利点がある。

そこで我々は、この一般的な離散空間上で定義された超対称ゲージ理論に対し、局所化の方法を使って分配関数を厳密に評価することに成功した。離散空間上での場の理論では、もともと経路積分の積分変数の自由度は有限であるが、局所化の方法を用いるとこの自由度がさらに簡約化し、より少ない積分変数による積分として表されることがわかった。分配関数を評価した結果は多面体によって分割された空間のオイラー数に依存し、局所化によって自由度が制限された最終積分表式は連続空間である通常の Riemann 面上で定義された超対称ゲージ理論の分配関数と規格化因子を除いて同等となる。

もともとが位相的ツイストを施した位相的場の理論であるとは言え、離散空間上の超対称理論の分配関数と連続空間上の超対称理論の分配関数の間の非常に興味深い関係を理解することができた。

これら一連の結果を導出するにあたり、以前から厳密な評価が可能な行列模型として知られていた Itzykson-Zuber(IZ)模型についても練習的な問題として局所化の観点から再解釈を行った。IZ 模型の積分が厳密に実行できる理由を超対称理論における局所化として捉えることによって、その固定点の持つ意味や超対称ゲージ理論(杉野模型)との関係も明らかになった。これは一連の研究の過程において副次的な結果である。

(4) 離散化された空間上でのゲージ理論におけるアノマリーと符号問題の数値計算による解析

前項の解析によって明らかになった離散化された空間上の超対称ゲージ理論を実際の数値計算によるシミュレーションで確認を行った。

一般にフェルミオン場を含む理論の数値計算を行う場合、数値積分時に位相因子が生じ、モンテカルロ法等の確率解釈に符号問題と呼ばれる困難を引き起こす。我々が解析する位相的ツイストされた超対称ゲージ理論においても符号問題は存在するが、通常は位相因子を単純に無視することで計算を行ってきた。

我々はそれまでの研究で発展させてきた局所化の方法による理論的な解析により、この符号問題の一部がフェルミオンのゼロモードに起因するアノマリー(積分測度の位相)と深く関連していることを明らかにした。このアノマリーを理論的に評価することによって、符号問題を生じさせる位相因子を補完する演算子(compensator)を挿入し数値積分することで、数値計算における符号問題を回避することに成功した。

この compensator を挿入した計算により、超対称理論における Ward-Takahashi 恒等式等、物理量をより正確に数値計算で求めることができるようになり、離散空間上の場の理論およびその数値計算法に関する知見を広

げることができた。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計７件）

① Kazutoshi Ohta and Yuya Sasai, "Exact Results in Quiver Quantum Mechanics and BPS Bound State Counting", JHEP **1411** (2014) 123 , 査読有
DOI: 10.1007/JHEP11(2014)123

② So Matsuura, Tatsuhiro Misumi and Kazutoshi Ohta, "Topologically twisted N=(2,2) supersymmetric Yang-Mills theory on an arbitrary discretized Riemann surface", PTEP **2014** (2014) no.12, 123B01, 査読有
DOI: 10.1093/ptep/ptu153

③ So Matsuura, Tatsuhiro Misumi and Kazutoshi Ohta, "Exact Results in Discretized Gauge Theories", PTEP **2015** (2015) no.3, 033B07, 査読有
DOI: 10.1093/ptep/ptv021

④ Kazutoshi Ohta and Yuya Sasai, "Coulomb Branch Localization in Quiver Quantum Mechanics", JHEP **1602** (2016) 106 , 査読有
DOI: 10.1007/JHEP02(2016)106

⑤ 太田和俊，「超対称箙模型と統計力学」，明治学院大学 法学研究 **101**（明治学院大学法学会),193-201，査読無

⑥ Syo Kamata, So Matsuura, Tatsuhiro Misumi and Kazutoshi Ohta, "Anomaly and sign problem in N=(2,2) SYM on polyhedra: Numerical analysis", PTEP **2016** (2016) no.12, 123B01, 査読有
DOI: 10.1093/ptep/ptw153

⑦ Syo Kamata, So Matsuura, Tatsuhiro Misumi and Kazutoshi Ohta, "Numerical Analysis of Discretized SYM on Polyhedra", PoS LATTICE **2016** (2016) 210，国際会議紀要，査読無
DOI: 10.22323/1.256.0210

〔学会発表〕（計２件）

① Kazutoshi Ohta, "Higgs and Coulomb Branch Description of the Volume of the Vortex Moduli Space", Progress in Quantum Field Theory and String Theory II, Osaka City Univ.，招待講演

② 太田和俊，「グラフ上の超対称ゲージ理論」，日本物理学会　2017 年秋季大会

６．研究組織
(1)研究代表者
太田 和俊（OHTA, Kazutoshi）
明治学院大学・法学部・准教授
研究者番号：80442937

(2)研究協力者
坂井 典佑（SAKAI Norisuke）
笹井 裕也（SASAI, Yuya）
松浦 壮（MATSUURA,So）
三角 樹弘（MISUMI, Tatsuhiro）
鎌田 翔（KAMATA, Syo）