

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 22 日現在

機関番号：14301

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2014～2016

課題番号：26420233

研究課題名(和文) 高効率電磁界解析のための新しい均質化法の開発と応用

研究課題名(英文) Development of new homogenization method for efficient electromagnetic analysis and its application

研究代表者

美船 健 (Mifune, Takeshi)

京都大学・工学研究科・講師

研究者番号：20362460

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,800,000円

研究成果の概要(和文)：不整合メッシュを使用する有限要素解析の精度を向上するための、新たな均質化法を開発した。開発した均質化法では、媒質定数をテンソルとして適切に設定することにより、準一様電磁界に対して有限要素法の解と厳密解の一致を数学的に保証する。異方性・非線形媒質を適切に扱う理論を構築し、マルチグリッド法と連携させることによる高速解析手法を開発した。一般化有限要素法の観点からの理論の整理についても行った。

研究成果の概要(英文)：We have developed a new homogenization method to improve the accuracy of finite element analysis using unfitted mesh. The homogenization method appropriately determines the material constant at unfitted element as tensor, and thereby provides the solution that mathematically coincides with the exact solution when the fields are uniform. We developed a theory to handle anisotropic and nonlinear media appropriately and developed a fast analysis method by combining with the multi grid method. Moreover, we also conducted theoretical analysis from the viewpoint of generalized finite element method.

研究分野：計算電磁気学

キーワード：電磁界解析 有限要素法

1. 研究開始当初の背景

電気機器設計の実用の場合では、開発コストの削減および開発サイクルの短縮を目指して、計算機による電磁界シミュレーションの活用が不可欠となっている。この原因には、近年の計算機及び計算技術の発展によって、安価なパソコン上でも従来不可能であった規模のシミュレーションを行えるようになってきたことが挙げられる。しかしながら、複雑かつ微細な構造を持つモデルの解析など、十分な精度を得るために極めて大規模な計算を要する問題は実用上多く存在しており、電磁界計算のさらなる高効率化が求められている。

電磁界シミュレーションにおいて実用上最も広く用いられている計算手法の一つに、有限要素法がある。研究代表者は、有限要素法による大規模高速電磁界計算技術の開発に継続的に取り組んでいる。本研究課題では、解析規模の肥大化を避けながら有限要素解析の高精度化を実現する新たな計算手法の開発を行う。

2. 研究の目的

有限要素法による電磁界計算では、解析領域を多数の三角形あるいは四面体などの小領域に分割した計算格子(メッシュ)を用いて、解析が行われる。この際、解析領域内に存在する媒質境界の形状に整合させたメッシュを用いるのが通常である。しかしながら、媒質境界を移動させながら多数回の解析を行う場合、媒質境界とメッシュの不整合を許容すれば、境界を移動させるごとにメッシュを再生成する必要がなく、計算負荷を大幅に削減できる。また近年では、GPUの効率的な使用などを狙って、直交格子状の単純なメッシュを使用するボクセル有限要素法が盛んに用いられている。ボクセル有限要素法では、必然的に、媒質境界とメッシュの不整合を扱う必要がある。

不整合メッシュを使用する有限要素解析では、媒質境界をまたぐ小領域についての媒質定数(誘電率、透磁率など)の設定が問題となる。境界を挟む両媒質についての算術平均を用いるなどの方法は簡便さゆえに広く使用されているが、それによる精度の悪化を緩和するために細密なメッシュ分割が要求され、解析規模の過度な増大を招く傾向にある。この問題を解決するため、新たな均質化法を開発する。

3. 研究の方法

不整合メッシュにおける媒質定数をテンソルとして適切に設定する、新たな均質化法を開発し、メッシュを過度に細密化することなく高精度な解析を行うことを可能にする。

提案する均質化法のアイディアの骨子は、準一様電磁界に対して有限要素法の解と厳密解の一致を数学的に保証することである。

まず、材料特性が等方線形である場合の静

電界問題について述べる。静電界問題の基礎方程式は

$$-\nabla \cdot (\epsilon \nabla \phi) = \rho \quad (1)$$

で与えられ、ここで ϵ, ϕ, ρ はそれぞれ、誘電率、電気スカラーポテンシャル、電荷密度を表す。有限要素法により式(1)を離散化して得られる方程式を

$$Kx = b \quad (2)$$

と表す。ここで K, x, b はそれぞれ係数行列、未知ベクトル、右辺ベクトルであり、係数行列と右辺ベクトルの成分は

$$[K]_{ij} = \int \epsilon \nabla N_i \cdot \nabla N_j d\Omega \quad (3)$$

$$b_i = \int \rho N_i d\Omega \quad (4)$$

で与えられる。 N_i はメッシュの各節点に關連付けられた形状関数である。

一般に、メッシュを細密化すればするほど、特定の要素の周辺の場合は相対的に一様分布に近づく。このことを考えると、準一様電磁界に対して有限要素法の解と厳密解の一致を保証することが重要な要件であることに對して、直感的な理解が得られる。

ここで、図1のように媒質境界上に位置する三角形要素について考える。媒質境界は直線

$$l(x, y) = px + qy + r = 0 \quad (5)$$

で表され、領域 $l > 0$ 、 $l < 0$ の誘電率がそれぞれ ϵ^+ 、 ϵ^- で与えられているとする。境界上に位置する三角形要素の各節点を反時計回りに n_i とし、それらの座標を (x_i, y_i) で与えるとする。また、 ϵ_i を節点 n_i が属する領域の誘電率とする。節点が境界上に位置するときは、零以外の任意の値としてよい。つまり図1の場合であれば

$$\epsilon_1 = \epsilon^-, \epsilon_2 = \epsilon^+, \epsilon_3 = \epsilon^+ \quad (6)$$

である。

非整合メッシュを用いた解析で準一様電磁界に対して有限要素法の解と厳密解の一致を保証するためには、媒質境界上に位置する全ての要素について、以下の式(7)のように誘電率テンソルを設定すればよい。

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & -q \\ q & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x & -q\beta^{-1} \\ u_y & p\beta^{-1} \end{pmatrix}^{-1} \quad (7)$$

ただし、

$$l_i = px_i + qy_i + r \quad (8)$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 & x_3y_1 - x_1y_3 & x_1y_2 - x_2y_1 \\ y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$S = \frac{1}{2} \sum a_i \quad (10)$$

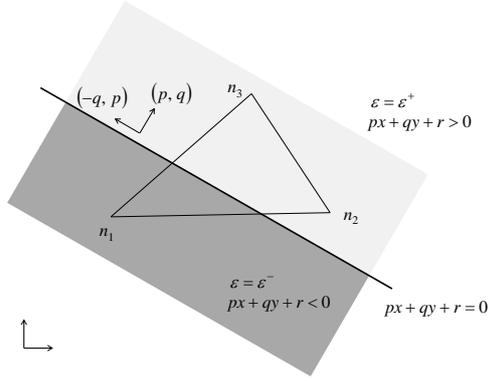


図1 境界付近のメッシュ

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \frac{1}{2S} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1/\varepsilon_1 \\ l_2/\varepsilon_2 \\ l_3/\varepsilon_3 \end{pmatrix} \quad (11)$$

$$\alpha = \frac{l_1^2}{(l_1 - l_2)(l_1 - l_3)} \quad (12)$$

$$\beta = \alpha\varepsilon_1 + (1 - \alpha)\varepsilon^+ \varepsilon^- / \varepsilon_1 \quad (13)$$

である。ここでは

$$l_1 \neq 0, \quad l_1 l_2 \leq 0, \quad l_1 l_3 \leq 0 \quad (14)$$

が成り立つよう節点番号を選んでいものとする。

次に、上記の結果を異方性材料が含まれる問題に拡張する。ここで、電界強度および電束密度をそれぞれ \mathbf{E}, \mathbf{D} で表し、領域 $l > 0, l < 0$ における電界強度がそれぞれ一様で、それぞれ $\mathbf{E}^+, \mathbf{E}^-$ で与えられる問題設定を考える。つまり、

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \mathbf{E}^+ & (l > 0) \\ \mathbf{E}^- & (l < 0) \end{cases} \quad (15)$$

である。このとき領域 $l > 0, l < 0$ の電束密度はそれぞれ、

$$\begin{cases} \mathbf{D}^+ = \varepsilon^+ \mathbf{E}^+ \\ \mathbf{D}^- = \varepsilon^- \mathbf{E}^- \end{cases} \quad (16)$$

である。またこのような場を与える電位分布を考え、節点 n_k における電気スカラーポテンシャルを ϕ_k で表す。

節点 n_k の電気スカラーポテンシャルが ϕ_k で与えられる場合、1次三角形要素を用いる有限要素法の通常の計算では、三角形要素内の電界強度は、

$$\mathbf{E}^{\text{FEM}} = -\frac{1}{2S} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix} \quad (17)$$

と計算される。ここで、

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 & x_3 y_1 - x_1 y_3 & x_1 y_2 - x_2 y_1 \\ y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \end{pmatrix} \quad (18)$$

$$S = \frac{1}{2} \sum a_i \quad (19)$$

であり、 S は三角形面積に等しい。

要素の均質化された誘電率テンソルを ε^{IH} 、それを式(17)の電界強度に作用させて得られる電束密度を

$$\mathbf{D}^{\text{FEM}} = \varepsilon^{\text{IH}} \mathbf{E}^{\text{FEM}} \quad (20)$$

とする。媒質毎に場が一様となる問題設定において有限要素解が厳密解に等しくなるとは、すなわち上で考えている ϕ_k が式(1)の解となるということであるから、

$$\int \nabla N_i \cdot \mathbf{D} d\Omega = 0 \quad (21)$$

が厳密に成り立っていることに注意すれば、要素ごとの積分について

$$\int_e \nabla N_i \cdot \mathbf{D}^{\text{FEM}} d\Omega = \int_e \nabla N_i \cdot \mathbf{D} d\Omega \quad (22)$$

を保証すればよいことが分かる。式(22)は、要素ごとに

$$\mathbf{D}^{\text{FEM}} = \frac{S^+ \mathbf{D}^+ + S^- \mathbf{D}^-}{S} \quad (23)$$

を満たすように式(20)の ε^{IH} を決定することで成立する。ここで S^+, S^- はそれぞれ、三角形の $l > 0, l < 0$ に属する部分の面積である ($S = S^+ + S^-$)。

詳細な計算は割愛するが、上記の考察に基づいて、異方性媒質を扱う境界均質化では、以下の式(24)のように均質化された誘電率テンソルを設定すればよい。

$$\varepsilon^{\text{IH}} = \begin{pmatrix} p & -q \\ q & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{pmatrix}^{-1} \quad (24)$$

ただし、

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \frac{1}{2S} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1/\varepsilon_m^1 \\ l_2/\varepsilon_m^2 \\ l_3/\varepsilon_m^3 \end{pmatrix} \quad (25)$$

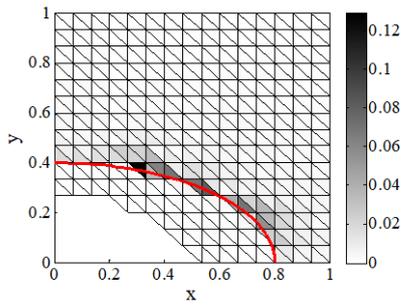
$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = -\frac{1}{2S} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 \varepsilon_m^1 / \varepsilon_m^1 \\ l_2 \varepsilon_m^2 / \varepsilon_m^2 \\ l_3 \varepsilon_m^3 / \varepsilon_m^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -q \\ p \end{pmatrix} \quad (26)$$

である。

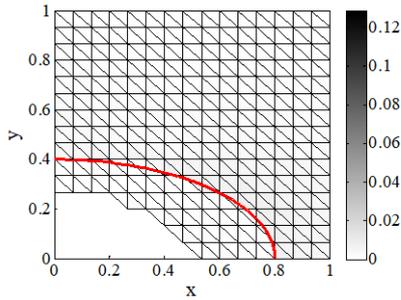
4. 研究成果

(1) 線形等方性の媒質のみが存在する場合の均質化法については課題応募時点で既に手法を確立していたが、解析対象が異方性媒質を含む場合、等方性媒質を前提として導出した均質化法の理論には小さくない修正が必要となる。均質化法の理論を再整理し、サンプル問題について、等方性媒質の問題と同様に理想的な精度向上効果が得られることを確認した[①③⑤]。

図2に、楕円状の異方性誘電体モデルに対



(a) 単純な平均による解析



(b) 均質化法を使用した解析

図2 電界の誤差分布.

して直交（不整合）メッシュを用いて解析を行った際の、誤差分布を示す。単純な平均による方法(a)と比較して、均質化法(b)を用いることにより誤差が大幅に削減されていることが分かる。図3に、格子分割数を変化させた際の、電界誤差の最大値の比較を示す。単純な平均を使用する方法では分割数を増やしても誤差の最大値が停滞しているのに対して、均質化法を使用した場合には整合メッシュを使用した場合と同等の精度向上が実現されていることが分かる。

(2) 均質化手法を用いることにより構造型メッシュを用いた高精度電磁界解析が可能になるため、さらに構造型メッシュと親和性の高いマルチグリッド法を応用することで解析の飛躍的な高速化が期待できる。ただし、不整合メッシュを含む有限要素解析においてマルチグリッド法を応用する場合、マルチ

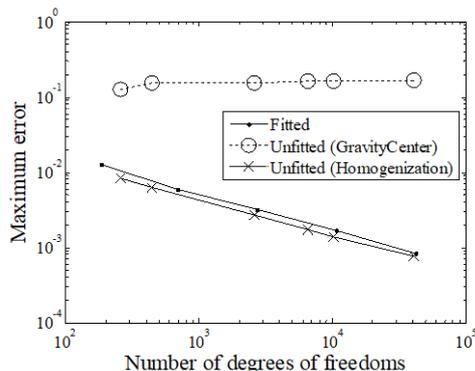


図3 誤差の最大値.

グリッド法で用いられる複数グリッド間の写像行列について標準的な作成法を用いるのでは、反復求解の加速効果を十分に得ることができない。

本研究では、不整合メッシュ中の電磁界諸量の振る舞いについて理論的な考察を行うことにより、マルチグリッド法と均質化法とを連携するための新しい写像行列の作成法を開発し、静磁界解析の例題についてその有効性を確かめた[④⑥]。

表1に、不整合メッシュを用いた静電界解析のサンプル問題について、マルチグリッド法を適用したときの反復回数を示す。標準的な写像行列を用いるマルチグリッド法では、特に問題サイズが大きい場合に反復収束性が著しく悪化しているのに対して、本研究で開発したマルチグリッド法では少数回の反復で求解を行うことができています。

表1 マルチグリッド解法の反復回数の比較

未知数の数	4225	263169
標準的マルチグリッド法	37	発散
均質化マルチグリッド法	11	23

(3) 等方非線形媒質を含む解析への同手法の応用について研究を行った。線形等方性の場合の均質化法の理論は非線形の場合にもほぼ修正なく応用できるが、均質化を行う小領域それぞれにおいて小規模の非線形方程式を解くことが求められる。

簡単なテスト解析について、これらの非線形方程式をニュートンラフソン法で解くことにより、線形媒質の場合と同様の解析精度向上効果が得られることを確かめた。

大規模な全体方式そのものも非線形方程式となるが、その求解法としてはニュートンラフソン法が有力である。ニュートンラフソン法の各反復において現れる方程式は、線形解析における磁気抵抗率を微分磁気抵抗率に置き換えた形で表される。通常、微分磁気抵抗率は異方性を含むテンソルの形で与えられるが、研究成果(1)において異方性材料を扱う場合のメッシュ均質化法を開発しているため、これを用いることで、非線形解析においても有効なメッシュ均質化法を構築できることが示される。

(4) 理論的観点から一般化有限要素法との比較について検討を行った。本研究で提案したメッシュ均質化法が、既存の一般化有限要素法とは異なる手法であることは既に明らかにされているが、本メッシュ均質化法と一般化有限要素法との関係について、理論的整理を行った。その結果、本メッシュ均質化法を広い意味における一般化有限要素法の枠組みで表現することは可能であり、材料境界における電磁界の“屈折”を表現する関数を形状関数として選び、重み関数として通常の

一次形状関数を用いることで、本研究で提案したメッシュ均質化法が得られることを明らかにした。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 1 件)

- ① T. Mifune, “Interface Homogenization Technique for Unfitted Finite Element Electromagnetic Analysis,” IEEE Transactions on Magnetics, 査読有, 51, 2015, 7203004.
DOI: 10.1109/TMAG.2014.2361321

[学会発表] (計 7 件)

- ② T. Mifune, “Interface Homogenization Technique for Unfitted Finite Element Electromagnetic Analysis,” 16th Biennial IEEE Conference on Electromagnetic Field Computation, May, 2015 (アヌシー) .
- ③ 美船健, “異方性媒質を含む不整合有限要素メッシュのための均質化法に関する検討”, 電気学会静止器回転機合同研究会, Sep. 2014 (宇都宮) .
- ④ 木村翼, 美船健, 松尾哲司, “不整合メッシュを扱う幾何マルチグリッド法への均質化法の適用に関する基礎的検討”, 電気学会静止器回転機合同研究会, Mar. 2015 (宮古) .
- ⑤ T. Mifune, “Interface Homogenization Technique for Electromagnetic Finite Element Analysis Including Anisotropic Media,” Conference on the Computation of Electromagnetic Fields, June 2015 (モントリオール) .
- ⑥ T. Kimura, T. Mifune, T. Matsuo, “Application of Homogenization Technique to Geometric Multigrid Method for Electromagnetic Finite Element Analysis,” Conference on the Computation of Electromagnetic Fields, June 2015 (モントリオール) .
- ⑦ T. Mifune, “Interface Homogenization Technique for Electro/Magneto-Static Finite Element Analysis Including Anisotropic Media,” IEEE International Conference on Wireless Information Technology and Systems and Applied Computational Electromagnetics, Mar. 2016 (ホノルル) .

[図書] (計 0 件)

[産業財産権]

○出願状況 (計 0 件)

○取得状況 (計 0 件)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

美船 健 (MIFUNE, Takeshi)

京都大学・大学院工学研究科・講師

研究者番号：20362460

(2) 研究分担者

該当無し

(3) 連携研究者

該当無し

(4) 研究協力者

該当無し