2版

様　式　C－１９、F－１９－１、Z－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２９ 年　 ６ 月　 ５ 日現在

機関番号：１２１０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2014～2016
課題番号：２６４２０４０９
研究課題名（和文）可変張力つき2変数スプラインの導出とその画像補間への応用

研究課題名（英文）Bivariate Spline in Variable Tension with Application to Image Interpolation

研究代表者
鎌田　賢（Kamada, Masaru）

茨城大学・工学部・教授

研究者番号：７０２０４６０９

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　1,700,000円

研究成果の概要（和文）：2変数3次スプライン関数の拡張として、一様な直交格子の各区画ごとに張力を変えられる可変張力つき2変数スプライン関数を導出した。得られた関数は、区間ごとに張力を変えられる可変張力つき1変数スプライン関数の2変数への拡張ともいえる。この可変張力つき1変数スプライン関数は、ディジタル画像を自然さを保ったまま拡大・回転する手法に有効であった。本研究で得られた可変張力つき2変数スプライン関数は、拡大・回転をより良くできるだけでなく、任意の形状へ変形することも可能にする。この2変数関数の実用に不可欠な局所台をもつ基底の構成法も得られた。

研究成果の概要（英文）：An extension of the bivariate cubic spline on the uniform grid is derived to have different tensions in different square cells of the grid. The resulting function can be interpreted also as a bivariate extension of the univariate spline in piecewise constant tension which was applied to adaptive interpolation of digital images for their magnification and rotation. The bivariate function makes it possible to magnify and rotate images better and even to deform images into any shapes. A locally supported basis, which is crucial for the practical use of the bivariate functions, is also constructed.

研究分野：情報工学

キーワード：画像補間　スプライン　状態空間表現

１．研究開始当初の背景

ディジタル画像を連続関数で表現する画像補間は、画像処理分野における古典的な問題である。その効用は、補間で得られた連続関数を再標本化することによって、拡大・回転した画像はもとより、任意形状への変形もできることにある。

画像処理ソフトウェアで利用されている典型的な画像補間手法は、多項式スプラインを用いている。多くの画像拡大ツールでは、最も単純な直線補間である 1 次スプライン、あるいは、2 階微分の 2 乗積分を最小化するという意味で 最も滑らかな補間である 3 次スプラインのどちらか一方をユーザが選択するようになっている。ユーザに選択を任せる理由は、これらの関数が一長一短の性質をもつためである。1 次スプラインは、シャギーと呼ばれるブロック状のアーチファクトを発生させやすい。3 次スプラインは、滑らかな補間を与えるのでシャギーを生じにくいが、輝度が急激に変化するエッジの周辺で余分な振動を起こしてリンギングと呼ばれるアーチファクトを発生させる。

シャギーとリンギングを同時に抑圧することをめざして、特性を適応的に変化させる画像補間法の研究が長年行われてきた。そのほとんどは、原画像内でエッジを検出して、エッジ近辺で関数を切替えるアプローチをとっていた。しかし、拡大あるいは変形されていく画像内でエッジ位置を正確に検出することは難しい。検出を誤れば、その影響は文字通り目に見えて明らかになってしまう。そのため、現在の商用ソフトウェアも、1 次と 3 次のスプラインを用意し、その選択をユーザに委ねざるをえない状況にある。

実は、1 次と 3 次のスプラインの中間の性質をもつ関数は、張力つきスプラインという名称で 1966 年より既知であった。張力つきスプラインは、標本点に与えられたデータを補間するという条件の下で、張力というパラメータで重みづけた 1 階微分の 2 乗積分という汎関数 と 2 階微分の 2 乗積分という汎関数の和を最小化する関数として定式化されている。張力つきスプラインは、張力を 0 にするとき 3 次スプラインに一致し、張力を大きくすると 1 次スプラインに近づく。この張力は、研究代表者が以前の研究で 2012 年に区間ごとに可変とするまで、全区間で一定値に固定されていた。

その時点で得られていた可変張力つきスプラインは、1 変数関数である。この可変張力つき 1 変数スプラインを用いて画像の x 方向と y 方向の補間を逐次行うことによって、拡大と回転は実現できたが、現在の画像処理ソフトウェアに備えられている任意形状への変形には本当の意味での 2 変数関数が必要である。従来の 1 次および 3 次のスプラインや張力が一定な張力つきスプラインは、その基底となる B スプライン関数が全区間で同じ形をしているので、2 変数関数への拡張は簡単であった。他方、可変張力つきスプラインは、その基底となる B スプライン関数が張力によって変化するので、単純には 2 変数関数に拡張できない。張力が標本化領域ごとに可変なスプラインを 2 変数関数として定式化し、その構成法と計算法を導くことが必要である。

２．研究の目的

目的は、張力が標本化領域ごとに可変な可変張力つき 2 変数スプラインの導出と有限領域外では恒常的に 0 となり、可変張力つき２変数スプラインが成す線形空間の基底となる B スプライン関数の構成である。後者は、正確で効率的な数値計算にとって不可欠である。

３．研究の方法

標本化区間ごとに異なる張力をもつ可変張力つき１変数スプラインを定める変分問題を拡張して、標本化領域ごとに異なる張力をもつ可変張力つき 2 変数スプライン補間を変分問題として定式化する。

この変分問題の解を状態空間表現で整理することによって、標本化された状態を経由して可変張力つき 2 変数スプラインの関数値を計算する手法を導く。

有限領域外では恒常的に 0 となる B スプライン関数を構成する手法を導く。

４．研究成果

(1)　張力が無い従来の 2 変数スプラインは、汎関数を最小化する変分問題の解として定式化されておらず、x と y のそれぞれの１変数 B スプライン関数で構成される基底の単なる直積として構成されていた。

張力つきの2変数スプラインを変分問題の解として扱うための準備として、まず、張力が無い場合の3次スプライン補間を解とするような変分問題を定式化した。その解を定める Euler-Lagrange 微分方程式は標本点以外では0であるデルタ関数の列を含む線形偏微分方程式となった。その一般解は、積分定数に相当する x と y の任意の関数から成る項を含むものになるが、結果的に従来の3次スプライン補間と同じになるためには、その項の特殊な例として x と y の3次多項式を選ばなければならないことがわかった。

(2)　この定式化を拡張して、標本化領域ごとに異なる張力をもつ2変数可変張力スプライン補間を変分問題として定式化した。その解を定める Euler-Lagrange 微分方程式も、標本点以外では0であるデルタ関数の列を含む線形偏微分方程式である。この方程式は、標本点でデルタ関数列が入力される線形ダイナミカルシステムを表すため、その振舞いを状態空間表現で整理することによって、標本化された状態を経由して可変張力つき2変数スプラインの値が計算できる。

(3)　Euler-Lagrange 微分方程式を 各標本化領域の内側と標本化領域の境界に分けて解いた。

① 各標本化領域の内側では、デルタ関数列の値が 0 であり、張力が定数となるので、x と y に関る定数係数の同次線形偏微分方程式として解ける。解を構成する主な項は 4 個であり、それぞれは双曲線関数と線形関数の組合せで表現できた。ただし、積分定数に相当する x と y の任意の関数から成る項を具体的に定めることには特別な工夫を要した。具体的には、張力パラメータを 0 に近づけた極限で従来の解である x と y の3次多項式のテイラー展開に一致するように、項の総数を 16 個とし、それらが張力パラメータを 0 に近づけたときに x と y それぞれについての3次以下の単項式に収束するように、主な4個の項以外の12個の任意項を選んだ。

この手続では、偏微分方程式を数学の問題として完全に解いているのではなく、無数にある解の中から、張力パラメータを 0 に近づけた極限で 3 次スプラインになるような解を恣意的に選んだことになっている。

これら16個の項の線形結合として可変張力つき 2 変数スプラインが表現できるので、線形結合係数から成る係数ベクトルは可変張力つき 2 変数スプラインを生成するダイナミカルシステムの状態空間表現の１つとなっている。

② 標本化領域の境界においては、デルタ関数の入力および張力の変化の影響によって状態遷移が生じる。元の偏微分方程式を x または y で1回積分することによって、標本化領域の境界において x と y それぞれについての可変張力つき 2 変数スプラインの3階微分値に、x と y それぞれについての 1 階微分値に張力の変化量を乗じた値 と 境界線上でゼロ以外の値をとるデルタ関数にかかる入力値の和が加わることが明らかとなった。

③ 標本化領域の境界での状態遷移と各標本化領域の内側での状態遷移を統一して取り扱うために、可変張力つき 2 変数スプラインおよびその高階偏微分で構成される別な状態ベクトルが必要となる。この状態ベクトルが、係数ベクトルで表される状態空間と同形となるように高階偏微分を適切に選択した。係数ベクトルと状態ベクトルとの対応関係を表す行列を求め、それが正則行列であることを確かめた。

④ 以上によって、各標本化領域内で、標本点に限りなく近い点での状態ベクトルからスタートして、それを係数ベクトルに行列で変換してから16個の項の線形結合として可変張力つき 2 変数スプラインとしての状態遷移および2変数スプラインの値を計算する方法が得られた。標本化領域の境界に達した時点で係数ベクトルから状態ベクトルへ逆変換する行列を適用し、さらに、その境界における状態遷移を適用すれば、境界を越えた隣の標本化領域内での状態遷移および2変数スプラインの値も同様に計算できる。

(4) 上記で得られた逐次的な状態遷移による計算方法は、広い区画に渡って計算しているうちに数値誤差が累積してしまうため、実用的ではない。また、どのような入力値をデルタ関数にかければ、計算される

可変張力つき 2 変数スプラインが、与えられたデータを補間するようになるのかという問題には全く答えていない。

この問題は、張力が無い場合の 2 変数スプラインにも共通することである。張力が無い場合には、有限領域外では恒常的に 0 となる B スプライン関数を構成し、それを基底として 2 変数スプラインを表現することによって解決されてきた。可変張力つき 2 変数スプラインに対しても、このような B スプライン関数を構成した。

この有限領域の大きさを x 方向 4 区画×y 方向 4 区画の標本化領域と仮定した。初期状態として 0 ベクトルでスタートし、この有限領域の左下端の標本点で入力値をデルタ関数に掛けて与えたことによって励起された状態が、x 方向および y 方向に 4 区画先で 0 ベクトルになるように、通過する 24 個の標本点でデルタ関数に掛けて与えるべき入力値を定める線形方程式を行列表現で構成した。この方法は、線形ダイナミカルシステムのデッドビート制御の考え方を 2 変数の場合に拡大適用したことに相当する。

この線形方程式を構成するベクトルは、状態ベクトルと係数ベクトルとの間の変換行列とその逆行列を区画ごとに 1 回使い、4 区画では最大でも 4 回まで使って計算されるため計算誤差の累積が深刻にはならない。

それぞれ方向の遷移を表す線形方程式での未知数は 4 個であり、0 ベクトルとなるべき状態空間の次元数は 16 であるが、線形方程式を構成する行列のランクが 4 であることが判明したため、意外なことであったが、24 個の入力値は一斉に定まるのではなく、4 個ずつのまとまりとして 6 回に分けて逐次的に かつ 一意に定められることがわかった。

(5) 実際の画像補間に供する数値計算プログラムの開発には至らず、今後の課題として残った。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計０件）

〔学会発表〕（計３件）

① Masaru Kamada and Kunimitsu Takahashi, Locally supported bivariate splines in piecewise constant tension, *Proceedings of the 2016 International Conference on Advances in Electrical, Electronic and System Engineering* (ICAEESE 2016), Putrajaya (Malaysia), pp.444-449 (Nov. 2016).

② Kunimitsu Takahashi and Masaru Kamada, Bivariate splines in piecewise constant tension, *Proceedings of the 11th International Conference on Sampling Theory and Applications* (SampTA 2015), Washington DC (USA), pp.302-306 (May 2015).

③ Masaru Kamada, Cardinal splines in piecewise constant tension (Invited talk), The 5th International Conference on Computational Harmonic Analysis in conjunction with the 29th annual Shanks Lecture, Vanderbilt University, Nashville (USA), (May 22, 2014)

〔その他〕

研究成果広報サイト
http://kamada.cis.ibaraki.ac.jp/JSPSgrant2014-2016/index.html

６．研究組織

(1)研究代表者
鎌田　賢（KAMADA　MASARU）
茨城大学・工学部・教授
研究者番号：70204609

(2)研究分担者
無し

(3)連携研究者
無し

(4)研究協力者
無し