

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 20 日現在

機関番号：12601

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2014～2016

課題番号：26540004

研究課題名（和文）マトロイドマイナー理論の新展開と量子情報処理の性能解析の融合研究

研究課題名（英文）Exploiting Matroid Minor Theory and Its Connection with Quantum Computing Models

研究代表者

今井 浩（IMAI, Hiroshi）

東京大学・大学院情報理工学系研究科・教授

研究者番号：80183010

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,800,000円

研究成果の概要（和文）：次世代計算モデルとして量子コンピュータが注目されている中、本研究ではマトロイドマイナー理論を展開して測定ベース量子コンピュータの計算性能を明らかにした。具体的には、その計算性能がマトロイドマイナー理論における幅パラメタにより特徴づけられることを明らかにし、その古典シミュレーションを行う計算法としてBDDを援用した新方法論を導入した。古典・量子両方でのネットワーク符号化等で基礎となるマトロイドの表現理論および有限体で表現できない場合のマイナーについて、禁止マイナーが無限となる基本的な場合を系統的に明らかにする成果も得た。マトロイドデータベースの整備も進め、将来の計算解析を可能とした。

研究成果の概要（英文）：This research investigated computation power of quantum computing, specifically measurement-based quantum computing, in terms of parameters developed in matroid minor theory by extending the theory itself. The power is characterized by the widths of matroids, and then a new approach using the BDD representing a quantum state is developed. The database of matroids of moderate sizes has been also maintained to use it for future computational analysis.

研究分野：量子情報科学

キーワード：アルゴリズム理論 有向マトロイド 量子コンピュータ 量子計算 量子ネットワーク符号化

1. 研究開始当初の背景

量子力学に従って動作する量子コンピュータは、現在のスパコンの能力を凌駕する新たな計算モデルとして期待されている。それを実現させるためにも、量子コンピュータの能力を理論的に解析しておくことは、たいへん重要である。素因数分解や離散対数問題に関しては量子コンピュータによる多項式時間を用いて解くことができるが、現時点で判明している古典アルゴリズムでは指数時間かかるものしか知られていない。しかし、これは証明されたわけではなく、引き続きこのギャップを埋めて能力を研究して解明することが重要である。

量子コンピュータ実現に関しては、少数の量子素子の実験研究は進む一方、中規模問題を解くのに必要な数の量子素子を制御するところで壁に直面している。この壁を克服する新量子計算モデルとして、量子クラスタ状態を用いる測定ベース量子計算が期待されている。その計算能力・操作性は、クラスタ状態を表現するグラフによって定まり、これまでにグラフマイナー理論において 2005 年に導入されたグラフのランク幅が関係し、我々によるそれに関する部分的成果もあるが、要求性能をもたらすクラスタ状態の特徴付けが未解決となっている。

グラフマイナー理論の発展形にマトロイドマイナー理論がある。グラフマイナー理論は、Robertson, Seymour により 30 年強かけて確立されたものである。マトロイドマイナー理論は、ここ 10 年ほどで精力的に体系化され、ごく最近になって 40 年来の未解決問題であった有限体上の線形マトロイドの禁止マイナーに関する Rota の予想が Geelen, Gerards, Whittle により解決され、定理として肯定的にアナウンスされたところである。すなわち、有限体上で表現できるマトロイドのクラスは有限な禁止マイナーで特徴づけられる。本研究メンバは、マトロイドの有限でない体での表現、また向き付け可能性で構成されるクラスについて禁止マイナーが無限になる場合を調べてきており、有限体上で表現できるマトロイドとそうでないマトロイドのクラスの間はまだ大きなギャップがあると認識している。

また、研究代表者は 2 値・3 値マトロイドのコンピュータ上で 2 分決定ダイアグラム (BDD) により表現する研究を進めていた。上述した本研究グループによる有限体でない場合の調査結果には適用できないが、一方でマトロイドマイナー理論を量子計算、特にグラフ量子状態を用いる測定ベース量子計算の性能解析に適用した場合に、従来研究の成果が活かせることが期待されている。

また、現代高速通信においても先進モデルであるネットワーク符号化に関して、マトロイドの表現論を用いた解析も出ているが、初期結果の後のブレークスルーが達成されて

いない。さらに、量子ネットワーク符号化の研究において、従来の Shannon 不等式を凌駕する量子通信が可能であるかどうかを解明するとともに、そこでマトロイド理論を適用することも期待されている。

2. 研究の目的

測定ベース量子計算について、それがユニバーサル計算を実現するには、グラフマイナー理論における台グラフの階数幅が十分確保されていることが必要であると示されている。本研究では、測定ベース量子計算を古典シミュレートすることも想定し、マトロイドのブランチ幅との関係を明らかにし、このようにマイナー理論の成果を量子計算能力のさらなる特徴づけを目指す。

同時に、本研究メンバがこの次世代モデルの性能解析を進める一方、離散システム研究でマトロイドマイナー理論の計算・理論解析を行ってきた点をさらに発展させる。特に、マトロイドマイナー定理では対象になっていない無限体で表現可能なクラスや向き付け可能性に関するクラスなどに関して、禁止マイナーが有限であるのか、無限になってしまうのかという問題についてさらに詳細に調べ、そのことを量子ネットワーク符号化や他の量子計算モデルへ適用することを検討し、マトロイドの両面性から、関連する最大カットなど量子計算に強く関係する離散構造の問題の解析も含め、これらの問題を融合した研究に取り組む。

そのマトロイドの性質自体を計算解析するために、現在世界で急激に進歩しているマトロイドマイナー理論においてマトロイドデータベース構築とその計算解析、BDD 援用など新方法論を導入する成果で独自の展開をもたらすことを目指す。

3. 研究の方法

本研究では、階数幅がグラフから定まるマトロイドの枝幅であることを着眼点として、マトロイドマイナー理論の枠組みでこの未解決問題に挑戦する。測定ベース量子計算のグラフ状態と量子ネットワーク符号化について、マトロイド理論を駆使して、既存の関連結果を精査し、それらを基にマトロイドマイナー理論の幅パラメータと禁止マイナーがいかに計算・操作性に影響を与えるかについて調べる。ごく最近になって証明されたマトロイドマイナー定理を基礎として、小規模なクラスタ状態を対象に計算解析の成果を一般のマトロイドの場合にあてはめて理論的に調べることにより、理論へのフィードバックを実現させる。

マトロイドを BDD で表現する我々の方法論を基に、ランク幅が小さいクラスタ状態を

対象にして部分構造の解析を行う。その上で、得られた解析結果をクラスタ状態の BDD 表現へと展開する。一方で量子状態のテンソル積分解から得られたアイデアを基に、BDD にテンソル積分解を導入して新たな BDD の提案を目指す。これらを総合して量子計算と離散システム論両面の成果をあげる。

また、測定ベース量子計算モデルが、Ising モデルと密接に関係しており、またその Ising モデルが昨今の量子アニーリング法の基礎となっている点にも着目し、組合せ最適化の観点からのアプローチもはかる。また、この組合せ最適化問題とマトロイドを凸多面体的組合せ論の観点から解析することに関係して、マトロイド凸多面体の拡張定式化の複雑度についても調べる。

4. 研究成果

本研究課題では、これらの複数分野にまたがる研究を融合させた上で研究を推進した。

マトロイドマイナー理論の核となるパラメタであるランク幅・パス幅を精査して、その量子計算への応用について研究取組みを開始した。これにより、量子情報での量子状態を表現するテンソルネットワークと、その対象マトロイド構造に関するランク分解およびパス分解との間に関係を見出し、これを基にして測定ベース量子計算における量子クラスタ状態の計算能力・操作性の解明に取り組んだ。分解から動的計画法によってボトムアップな計算に着目しながら、森山・平石による低ランクのマトロイドの計算解析・分解の結果に基づいて、測定ベース量子計算の適用範囲を近い将来に物理実現可能な範囲へと拡張することを目標として研究を推進した。また、マトロイドの BDD 表現を、両クラスタ状態の BDD 表現への拡張することを行い、BDD 研究の観点からは量子情報のテンソル積構造をフィードバックした新 BDD 提案へとつなげることも取り組んだ。量子計算の面からの貢献としては、量子計算分野の国際会議において研究成果発表を行った。ここで得られた成果が、この後のマトロイドの表現可能性理論とネットワーク符号化について量子情報の面から展開させるという取組みへとつながった。

量子情報面での成果を述べると、測定ベース量子コンピュータの計算性能をマトロイドパラメタにより明らかにした。具体的には、量子アニーリングで注目を浴びている Ising モデル分配関数計算において、マトロイド幅(ランク幅など)に基づくパラメタに関して現時点で最良のアルゴリズムを与えた(論文(2))。線形ランク幅に関して、VLSICAD で成功をおさめている BDD との関係性を明らかにし、量子計算における BDD としての操作を提示した(論文(1))。また、Ising モデルに関してさらにマトロイドマイナー理論の観点で

パラメタによる特徴づけへとつなげる研究を進めた。

有限体上の線形マトロイドに関するマトロイドマイナー定理に関しては、本グループの先行研究である計算解析による成果を新たな観点から発展させ、この取組みについてグラフとマトロイドの構造に関する国際ワークショップで発表を行った(学会発表(1,2))。有限体でないその外からアプローチする研究に取り組む、無限体の表現性や有向マトロイドに関係した有向化可能なクラスにおいて、マイナーに関して閉じている典型的なクラスで禁止マイナーが無数個構成できる特徴づけを与え、論文(3,4)でその成果を発表した。

また、量子情報の Bell 不等式において、あるクラスのグラフのカット多面体のファセットであり、近年その拡張複雑度が解明されつつあることに着目し、新たな取組みも行った。最大カット問題は Ising モデルの最小エネルギー状態を求める問題と等価であり、本研究では、マトロイドのクラスにおいて横断マトロイドが lower truncation して得られる豊かなものについて、それらが多項式オーダーの拡張複雑度を持つことを著者らの過去の研究を発展させて示し、統一的な枠組みを示した(論文(5))。幾何構造から組合せ論への展開、そして離散構造のフローに関する研究においても成果も得た(論文(6,7))。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 7 件)

(1) Jean-Francois Baffier, Vorapong Suppakitpaisarn, Hidefumi Hiraishi and Hiroshi Imai, Parametric Multiroute Flow and Its Application to Multilink-attack network, *Discrete Optimization*, Vol.22(A), pp.20-36, 2016, 査読有

(2) Akitoshi Kawamura, Sonoko Moriyama, Yota Otachi, and Janos Pach, A Lower Bound on Opaque Sets, *Proceedings of the 32nd Symposium on Computational Geometry*, Vol.32, pp.46:1-46:10, 2016, 査読有

(3) Shuichi Hirahara, Hidefumi Hiraishi, and Hiroshi Imai, Extended Complexity of Lower-Truncated Transversal Polymatroids, *Proceedings of the 18th Korea-Japan Joint Workshop on Algorithms and Computation (WAAC2015)*, pp.17-20, 2015, 査読有

(4) Hidefumi Hiraishi and Sonoko Moriyama, Orientable or Representable Matroids over Infinite Fields of Rank 3,

Proceedings of the 9th Hungarian-Japanese Symposium on Discrete Mathematics and Its Applications, pp.1, 2015, 査読有

(5) Hidefumi Hiraishi and Sonoko Moriyama, Minimal Non-Orientable Matroids of Rank Three, European Journal of Combinatorics, Vol.50, pp.123-137, 2015, 査読有

(6) Hidefumi Hiraishi, Hiroshi Imai, Yoichi Iwata, and Bingkai Lin, Parameterized Algorithms to Compute Ising Partition Function, Proceedings of the 9th Hungarian-Japanese Symposium on Discrete Mathematics and Its Applications, pp.212-220, 2015, 査読有

(7) Hidefumi Hiraishi and Hiroshi Imai, BDD Operations for Quantum Graph States, Reversible Computation, Lecture Notes in Computer Science, Vol.8507, pp.216-229, 2014, 査読有

[学会発表](計 16件)

(1) Sonoko Moriyama, Bernd Gaertner, Hiroshi Imai, Hiroyuki Miyazawa, and Jiro Nishitoba, Geometric Optimization Related with an LCP with SPD-matrices, The 5th International Conference on Continuous Optimization, 2016年8月11日, 政策研究大学院大学(東京都・港区).

(2) Hidefumi Hiraishi, Shuichi Hirahara, and Hiroshi Imai, A Note on Extended Formulations of Lower-truncated Transversal Polymatroids, The 5th International Conference on Continuous Optimization, 2016年8月11日, 政策研究大学院大学(東京都・港区).

(3) Sonoko Moriyama and Hidefumi Hiraishi, $Q[x]$ -representable Excluded Minors for Q -Representable Matroids of Rank Three, 2016 International Workshop on Structure in Graphs and Matroids (招待講演), 2016年7月15日, アイントホーフェン(オランダ).

(4) Sonoko Moriyama, and Hidefumi Hiraishi, Excluded Minors for Matroids of Rank Three, SIAM on Conference on Discrete Mathematics (招待講演), 2016年6月6日, アトランタ(アメリカ合衆国).

(5) Hidefumi Hiraishi, Tree Tensor Network, Quantum Computing, and Graph Minor Theory, The 75th Okazaki

Conference Tensor Network States: Algorithms and Applications 2016 (招待講演), 2016年1月11日, 岡崎コンファレンスセンター(愛知県・岡崎市).

(6) Hiroshi Imai, Parameterized algorithms to compute Ising partition function via graph decompositions, The 75th Okazaki Conference Tensor Network States: Algorithms and Applications 2016 (招待講演), 2016年1月11日, 岡崎コンファレンスセンター(愛知県・岡崎市).

(7) Hidefumi Hiraishi and Sonoko Moriyama, Excluded Minors for Q -Representable Matroids in Algebraic Extension, The 18th Japan Conference on Discrete and Computational, 2015年9月14日, 京都大学(京都府・京都市).

(8) Hidefumi Hiraishi, Hiroshi Imai, Yoichi Iwata, and Bingkai Lin, Efficient Parameterized Algorithm to Compute Planar Ising Partition Function, The 15th Asian Quantum Information Science Conference (AQIS), 2015年8月24日, ソウル(韓国).

(9) Hiroshi Imai, and Yosuke Yano, Satoru Yasuda, Benchmark Test on Solution Quality for Max Cut Solvers, The 15th Asian Quantum Information Science Conference (AQIS), 2015年8月24日, ソウル(韓国).

(10) 安田智, 矢野洋祐, 今井浩, Benchmark Test on Solution Quality for max cut solvers, 夏のLAシンポジウム, 2015年7月14日, ゆのくに天祥(石川県・加賀市)

(11) 今井浩, 矢野洋祐, グラフの最大カット問題と汎用最適化ソフトウェア, 量子情報技術研究会(QIT32), 2015年5月25日, 大阪大学(大阪府・吹田市)

(12) H. Imai, H. Hiraishi, and S. Hirahara, Extended Formulations of Cut Polytopes and Quantum Correlation/Interaction, 第31回量子情報技術研究会(QIT31), 2014年11月18日, 東北大学(宮城県・仙台市)

(13) S. Hirahara and H. Imai, On Extended Complexity of Generalized Transversal Matroids, 電子情報通信学会コンピュータシミュレーション研究会, 2014年10月18日, 中央大学後楽園キャンパス(東京都・文京区).

(14) H. Hiraishi, H. Imai, Y. Iwata and B. Lin, BDD Representations for Quantum Graph State and Ising Model, Asian

Quantum Information Science Conference
2014 (AQIS 2014), 2014年8月20日, 芝蘭
会館(京都府・京都市).

(15) Sonoko Moriyama, Minimal
Non-Orientable Matroids of Rank Three,
2014 International Workshop on Structure
in Graphs and Matroids, 2014年7月21日,
プリンストン(アメリカ合衆国). 招待講演.

(16) Hidefumi Hiraishi, Excluded Minors
for Orientability and Representability of
Matroids, 2014 International Workshop on
Structure in Graphs and Matroids, 2014年
7月21日, プリンストン(アメリカ合衆国).

〔図書〕(計 0件)

なし

〔産業財産権〕

出願状況(計 0件)

なし

取得状況(計 0件)

なし

〔その他〕

ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

今井 浩 (IMAI, Hiroshi)

東京大学・大学院情報理工学系研究科・教授

研究者番号: 80183010

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

森山 園子 (MORIYAMA, Sonoko)

日本大学・文理学部・教授

研究者番号: 20361537

(4) 研究協力者

平石 秀史 (HIRAISHI, Hidefumi)

東京大学・大学院情報理工学系研究科・助教

研究者番号: 70795335