

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 8 日現在

機関番号：10101

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2014～2015

課題番号：26610001

研究課題名(和文) ワイル配置のイデアル部分配置の研究

研究課題名(英文) Study on Ideal Subarrangements of Weyl arrangements

研究代表者

寺尾 宏明 (TERAO, Hiroaki)

北海道大学・国際本部・特任教授

研究者番号：90119058

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,900,000円

研究成果の概要(和文)：本研究の主眼は、超平面配置の理論をルート系、あるいは、より一般に鏡映群の代数・幾何の研究に応用することによって、従来の手法では得られなかった深さをもつ新しい知見を得ることであった。我々は、Summers-Tymoczkoの第一予想の証明のための具体的計算から出発し、教科書にも載っている著名な定理であるShapiro-Steinberg-Kostant-Macdonaldの双対分割定理が、ワイル配置のある種の制限配置に関しても成立することを立証した。

研究成果の概要(英文)：The main purpose of this research was to obtain new results, by applying the theory of hyperplane arrangements to the algebraic/geometric study of root systems or reflection groups in general, with a new depth which would not be reachable by the known approaches. The research began with explicit calculations with the intention to prove the first conjecture by Summers-Tymoczko in mind. Finally, we verified the dual partition theorem by Shapiro-Steinberg-Kostant-Macdonald, which is a celebrated theorem found in textbooks, for some restriction arrangements of the Weyl arrangements.

研究分野：数物系科学(数学・代数学)

キーワード：超平面配置 ルート系 ワイル配置 自由配置 イデアル 指数 高さ 双対分割定理

1. 研究開始当初の背景

超平面配置は、有限次元ベクトル空間内の余次元 1 の部分空間 (超平面と呼ぶ) の有限個の集合として定義される。その定義の単純さ、素朴さから明らかなようにありふれた数学的对象であり、様々なアプローチを許す研究対象である。たとえば、超平面配置のポアンカレ多項式は、超平面配置に付随する交叉束上のメビウス関数を係数として定義される非負整数係数多項式であり、組み合わせ論的对象である。一方、ポアンカレ多項式は、基礎体が複素数体の場合、超平面配置に属する超平面たちの合併集合の補集合のなす非コンパクト多様体のベッチ数を係数とする位相的ポアンカレ多項式と一致することが知られている (Orlik-Solomon 1980)。また、超平面配置が自由配置になる場合には、ポアンカレ多項式は、整数環上で一次式の積に因数分解することが証明されている (寺尾 1981)。そして、その一次式の一次の項の係数の集合は、指数と呼ばれ、その定義から、代数幾何的な対象である。このように、超平面配置に於いては、組み合わせ的不変量、位相幾何的不変量、代数幾何的不変量の 3 者が密接に関連して、美しい三位一体をなしている。

さて、ユークリッド空間内のルート系は、リー群の分類という大きな目的のために、ヴィルヘルム・キリングとエリー・カルタンによって 19 世紀末に導入され、現在では、数学の広い分野における普遍的かつ重要な存在として認識され、活発な研究が行われている。しかし、100 年以上の研究の歴史にもかかわらず、ルート系に関する謎はまだまだ尽きない。ルート系内の各正ルートに直交する超平面を集めてできる超平面配置をワイル配置と呼ぶ。ワイル配置の部分配置であって、正ルート束のイデアルに対応する超平面配置をイデアル配置と呼ぶ時、すべてのイデアル配置が自由配置になり、その指数とルートの高さとの間に、双対分割という組合せ的な関係が成立するという定理が、すでに本研究開始の時点で実質的に証明されていた。その定理の最終形は論文として 2016 年になってようやく発表された。この定理は、教科書にも載っている著名な定理である Shapiro-Steinberg-Kostant-Macdonald の双対分割定理の自然な拡張であり、その証明は超平面配置の理論を用いた新証明であった。また、結果的に、Sommers-Tymoczko (2006) の第 2 予想を肯定的に解決することとなった。

2. 研究の目的

本研究は、この論文 から出発して、更なる高みを目指すものである。例えば、Sommers-Tymoczko の第 1 予想を証明することがひとつの具体的な目標であった。第 1 予想は、イデアル配置の指数 (代数的・組合せ的对象) をヘッセンベルク多様体 (幾何学的対象) のベッチ数を関連付ける結果であり、代数的不変量と幾何学的不変量を結びつける部分に真の重要性がある。その意味では、論文 で得られた結果と用いられた新手法を深めることによって、代数的不変量と幾何学的不変量の未知の関係を明らかにすることこそが本研究の目的であると言えよう。

3. 研究の方法

当初、日米独 3 国の 3 チームからなる研究実施体制を想定していた。担当は、各々、超平面配置、代数、計算代数である。しかし、米国チームのリーダーである Louis Solomon が健康上の理由で、26・27 年度中、共同研究に全く参加できなかった。Solomon は、年齢こそ 80 歳を越えるとはいえ、確かな記憶力と鋭い知性に、私は最大限の信頼を置いていた。また、本研究開始前年の 25 年度までは、4 年間連続で、本研究連携研究者の阿部拓郎 (当時京大、28 年 3 月 1 日より九大) と共に米国を訪れて研究打ち合わせを行っていただけに、今回、Solomon の協力が得られなかったのは本研究の遂行に対する大きな打撃であった。いずれにせよ、ルート系とそのイデアルという有限かつ具体的な対象から派生する研究なので、まずは実例の計算が重要であることには変わりがない。実例計算において、Roehle-Cuntz-Barakat-Hoge から成る独チームは世界最高の実力を持ち、26 年度前半、ワイル配置の部分配置の自由性について大量の計算を行った。この計算の目的は、論文 で証明された定理が、任意の部分配置に対してどこまで一般化できるか、を見極めるためであった。この計算結果に関して独チームとは、26 年 12 月と翌 27 年 8 月に、研究打ち合わせを行った。その際、Weyl 配置の部分配置の組み合わせの情報、当初考えていたことに比べ、はるかに複雑で理解困難であることが明らかになった。これにより、論文 の主結果を部分配置のみを考えて一般化することは、非常に困難であることがわかった。一方、ワイル配置の制限配置について興味ある実例が得られた。たとえば、5 次元以上の D 型のワイル配

置を $A \times A$ に制限して得られる制限配置は, その濃度が一定には定まらない. 言い換えれば, ワイル配置の制限配置の組み合わせ的情報は, 制限する空間のタイプでは定まらないのである. 特に, $A \times A$ の型をもつ余次元 2 の空間たちは, 単一軌道に属していないことが確認された. この時点で, 研究計画を変更し, ワイル配置の部分配置ではなく, むしろ制限配置についての双対分割定理に注力すべきだと気づいたため, 27 年 10 月, 米国のシカゴから特異点論・代数幾何の専門家で, 超平面配置にも明るい Anatoly Libgober を招聘して, Simona Settepanella (北大) も加わり研究打ち合わせを行った. Libgober が Solomon の穴を埋めることにはならないが, 新しい研究計画のためには, 有効な人選であった. 一方, 定期的に研究打ち合わせを行っていた連携研究者の阿部拓郎が, 27 年に新しい除法的定理を証明した. すなわち, 寺尾による加法定理(1980)の前提条件を大幅に緩和した. その結果, 新しい自由配置のクラスが定義されることとなった.(この結果は, 最も権威ある学術誌のひとつである *Inventiones Mathematicae* に掲載されることが決定している.) ワイル配置の制限配置を詳細に調べて, 阿部の結果を適用すれば, ワイル配置の制限配置が組み合わせ的自由であることが示されることになる. その後の, 阿部拓郎との共同研究によって, $A \times A$ への制限配置の振る舞いについて理解し, 双対分解定理がこの場合も成立することを年度末までに確認し, 米国ストーンブルックで 28 年 3 月に開催された米国数学会 (AMS) 主催の研究集会で発表し, 現在, 論文執筆中である.

4. 研究成果

以下, 古い順に論文の内容を解説する.
 日本数学会の機関誌である「数学」編集部の依頼で執筆した総説である. これまでの研究の流れを大づかみにするとともに, 今後の重要問題を提示した.
 シー配置が自由配置であることは, 吉永正彦による重要な結果であるが, 基底の具体形は知られていない. ここでは, 単純ルート基底と呼ばれる「良い基底」が常に存在することを示した.
 発表順は逆になったが, この結果をアフィン・ワイル配置に適用することによって, 自由部分配置のみからなるフィルトレーションが存在することを示した.
 すでに述べたので省略する.
 射影直線配置を拡張した対象である射

影平面曲線配置の研究である. 平面曲線の特異点がすべて擬斉次であるという条件の下では, 対数的微分形式がよく振る舞うことを示した.

コクセター配置の複素版であるユニタリ鏡映配置について, 調和的な不変式基底を求める公式を証明した.

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 6 件)

Canonical systems of basic invariants for unitary reflection groups. (Norihiko Nakashima, Hiroaki Terao, Shuhei Tsujie) *Canadian Mathematical Bulletin*, 査読有, **59** (2016), doi 10.4153/CMB-2016-031-7

Logarithmic vector fields for curve configurations in \mathbb{P}^2 with quasihomogeneous singularities. (arXiv:1407.3237, <http://arxiv.org/abs/1407.3237>) (Hal Schenck, Hiroaki Terao, Masahiko Yoshinaga) *Mathematical Research Letters*, 査読有 (to appear)

The freeness of ideal subarrangements of Weyl arrangements. (Takuro Abe, Mohamed Barakat, Michael Cuntz, Torsten Hoge, Hiroaki Terao) *Journal of the European Mathematical Society (JEMS)*, 査読有, **18** (2016), 1339-1348, doi 10.4171/JEMS/615

Free filtrations of affine Weyl arrangements and the ideal-Shi arrangements. (Takuro Abe, Hiroaki Terao) *Journal of Algebraic Combinatorics*, 査読有, **43** (2016), 33-44, doi:10.1007/s10801-015-0624-z

Simple-root bases for Shi arrangements. (Takuro Abe, Hiroaki Terao) *Journal of Algebra*, 査読有, **422** (2015), 89-104, doi:10.1016/j.jalgebra.2014.09.011

数学 論説「超平面配置に関する最近の話題」. (Hiroaki Terao, Masahiko Yoshinaga) *数学*, 査読有, 第 66 巻第 2 号, 2014 年春季号, 157-179

[学会発表](計 14 件)

Hiroaki Terao, **Subarrangements and**

restrictions of Weyl arrangements. an invited talk at the Special Session on "Topology and Combinatorics of Arrangements (in honor of Mike Falk)" at an AMS Spring Eastern Sectional Meeting, 2016年3月19日, ストーンブルック大学(アメリカ合衆国)

Hiroaki Terao, **Multiple addition theorem on arrangements of hyperplanes and a proof of the Shapiro-Steinberg-Kostant-Macdonald dual-partition formula.** an invited talk at "Braids, Configuration Spaces, and Quantum Topology," 2015年9月8日, 東京大学(東京都・目黒区)

Hiroaki Terao, **Before and After the Ideal-free Theorem.** an invited talk at "Hyperplane arrangements and reflection groups," 2015年8月11日, ハノーファー(ドイツ)

Hiroaki Terao, **On Parabolic Subarrangements and Restrictions of Weyl arrangements.** an invited talk at "Differential and combinatorial aspects of singularities," 2015年8月7日, カイザースラウテルン(ドイツ)

Hiroaki Terao, **Ideal Free Theorem and Saturated Free Filtrations of Affine Weyl Arrangements.** an invited talk at "Computational Geometric Topology in Arrangement Theory," 2015年7月10日, プロビデンス(アメリカ合衆国)

Hiroaki Terao, **Ideal Free Theorem and Saturated Free Filtrations of Affine Weyl Arrangements.** an invited talk at "Algebraic structures in combinatorics and geometry," 2015年6月11日, 京都大学数理解析研究所(京都府・京都市)

Hiroaki Terao, **Arrangements of hyperplanes and applications.** an invited special talk, 2015年3月13日, 大田広域市(韓国)

Hiroaki Terao, **Ideal Free Theorem and Saturated Free Filtrations of Affine Weyl Arrangements.** an invited talk at "The 10th Kagoshima Algebra-Analysis-Geometry Seminar,"

2015年2月17日, 鹿児島大学(鹿児島県・鹿児島市)

Hiroaki Terao, **Free filtrations of affine arrangements of infinitely many hyperplanes.** an invited talk at "Hokkaido University - University of Bremen Joint Seminar "Arrangements of Hyperplanes", 2014年12月1日, ブレーメン(ドイツ)

Hiroaki Terao, **Multiple addition theorem on arrangements of hyperplanes and a proof of the Shapiro-Steinberg-Kostant-Macdonald dual-partition formula.** an invited talk at "The 1st Workshop of JSPS-MAE Sakura Program "Geometry and Combinatorics of Hyperplane Arrangements and Related Problems," 2014年9月3日, 北海道大学(北海道・札幌市)

Hiroaki Terao, **Ideals of the roots posets and a new proof of the dual-partition formula by Shapiro-Steinberg-Kostant-Macdonald.** an invited talk at "The 2nd Franco-Japanese-Vietnamese Symposium on Singularities," 2014年8月26日, 北海道大学(北海道・札幌市)

Hiroaki Terao, **Chambers of Arrangements and Arrow's Impossibility Theorem.** Workshop at "Recent developments on geometrical and algebraic methods in Economics," 2014年8月22日, 北海道大学(北海道・札幌市)

Hiroaki Terao, **On ideal subarrangements of Weyl arrangements.** an invited talk at "The 13th International Workshop in Real and Complex Singularities," 2014年7月28日, サンパウロ(ブラジル)

Hiroaki Terao, **On ideal subarrangements of Weyl arrangements.** FPSAC '14 (The 26th International Conference on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics), 2014年6月30日, シカゴ(アメリカ合衆国)

[図書](計1件)

Takuro Abe, Mohamed Barakat, Michael Cuntz, Torsten Hoge, Hiroaki Terao,
The freeness of ideal subarrangements of Weyl arrangements. *in: DMTCS Proceedings of "26th International Conference on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics (FPSAC 2014)", 2014, 総ページ数 956(うち 501-512 ページを執筆)*

〔その他〕

ホームページ等

寺尾 宏明ホームページ

<http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~terao/>

6 . 研究組織

(1) 研究代表者

寺尾 宏明 (TERAO, Hiroaki)

北海道大学・国際本部・特任教授

研究者番号：90119058