様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

# 科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成　２９　年　　４　月　１９　日現在

機関番号：　１４４０１
研究種目：　挑戦的萌芽研究
研究期間：　2014～2016
課題番号：　２６６１０００７

研究課題名（和文）Conformal代数とLie代数の具体的対応に関する研究

研究課題名（英文）Studies on conformal algebras and Lie algebras

研究代表者
永友　清和（NAGATOMO, Kiyokazu）

大阪大学・情報科学研究科・准教授

研究者番号：９０１７２５４３

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,000,000円

研究成果の概要（和文）：conformal代数は自然数をパラメータとする無限個の積を持つ代数的対象である。その定義は複雑で簡易化が望まれていた。本研究ではconformal代数とLie代数の圏がが同値あることを証明した。これにより、conformal代数はLIe代数の括弧積一つで定義されることになる。具体的には、conformal代数のquasiprimoitive要素の空間にquasiprimitive写像で積を定義し、その積を用いて括弧積を定めた。この括弧積がLIe代数のJacobi律をみたすことを証明するために、多くの多項式に関する恒等式を発見した。

研究成果の概要（英文）：Conformal algebras have finitely many products which are parametrized by natural numbers. In this project we prove the equivalence of categories between the category of conformal algebras and the category of Lie algebra. Therefore, we can define the notion of conformal algebras by a single product called the Lie bracket. (The definition of conformal algebras are very complicated because of infinitely many products.) To prove the equivalence of categories we introduced the notion of quasi-primitive projection which are used to define a Lie bracket on the space of quasi-primitive elements. In pour proof of the equivalence of categories, we found many identities on polynomial functions in four indeterminate, which will be applied to other areas of mathematics.

研究分野：　頂点作要素代数

キーワード：　共形代数　頂点作要素代数　リー代数　圏同値

1.研究開始当初の背景
Conformal 代数は頂点作用素代数の整数で定まる 2 項演算のみたす公理系の中でも交換関係式が非負の整数で閉じていることに注目して V. Kac により導入された。頂点作用素代数に比較して，取り扱いが比較的容易であり，例えば，有限階数の conformal 代数の分類は V. Kac によりほぼ与えられている(その分類は著書 Vertex operator for beginners で：与えられているが完全ではない。)。

しかし，階数有限でない場合には非負整数の 2 項演算に関する公理系(交換関係式)が障害になり研究が進んでいない。したがって，非負整数の 2 項演算に関する公理系をより理解することが可能な定式化が要請されていた。

２．研究の目的
primitively generated な conformal 代数(PGC と略する)の圏と非負の整数で次数付けされた primitively generated な次数付された Lie 環の圏が圏同値であることを証明することを目的とする研究を実施した。これにより，無限加算個の 2 項演算に関する公理系で定義されていた conformal 代数を Lie 環(ただ一つの積を持つ)の公理系で表現することが可能になった。本研究では自然な条件を備えた conformal 代数と一変数多項式環のテンソル積が conformal 代数の 2 項演算から定義されるただ一つの 2 項演算が歪対称性と Jacobi の関係式をみたす，つまり，Lie 環を定義することを証明することを第一の目的とした。このようにして構成される Lie 環は Lie 環 sl(2,C)を微分とし, 非負整数で次数付けされ, かつ, この次数付けに関して次数付き Lie 環であることを示した。また Lie 環 sl(2,C)が作用しているので昇降演算子の核に属する要素(primitive 要素)で生成される。

本研究では対象とする上述の 2 つの圏の圏同値を目的とし，上述の条件で特徴づけられた Lie 環から conformal 代数を構成した。

３．研究の方法
平成 25 年度は，PGC 代数の圏から非負の整数で次数付けされた次数付き primitively generated Lie 環(PGL と略する)への関手を構成した。この構成は次の段階を経て実現される。ここで primitively generated とは単純 Lie 環 sl(2,C)作用が存在し，primitive な要素により，　sl(2,C)の作用で生成される空間である。

(1) Conformal 代数の primitive な要素から構成される代数系(ここでは P-代数と云う)の圏と conformal 代数の圏は圏同値であることが知られている(これは conformal 代数の積と P-代数の積との間の代数的関係式により証明される。)。そこで P-代数と多項式環のテンソル積に P-代数の積を用いて，Lie 環の構造を導入する。この表示を導入するのに W. Eholzer により証明された W-代数の交換関係式がガイドラインになるものと期待していた。しかしながら，この括弧積が Jacobi の恒等式をみたすことを証明することは非常に困難であった。その理由は括弧積が P-代数の無限個の 2 項演算を用いて定義されるので P-代数の圏と PGC 代数の圏の圏同値を与える組み合わせ論的な代数関係式(この関係式自体非常に複雑である。) が Jacobi の恒等式を証明するために必要であったからである。さらに, Jacobi の恒等式を定義する代数関係式と P-代数の圏と conformal 代数の圏の圏同値を与える恒等式の代数的な関係式が明確にならないと Jacobi の恒等式の証明は困難である。そこで本研究では P-代数の圏と conformal 代数の圏の圏同値を与える定義式を用いて Jacobi の恒等式を定義する代数関係式を表示する問題を考えた。この部分は，次数が小さいときには数式処理システムを用いて計算機で関係式を求めることが可能である。しかる後, 成立すべき代数関係式を予想し, それを組み合わせ論的に証明した。

(2)階数有限な primitively generated な graded Lie 環の圏から conformal 代数の圏への関手を構成する。この部分は本研究計画の中でも最も困難であると考えられるが, (1)で構成した関手の構造を詳しく調べることにより，graded Lie 環が与えられたとき，どのようにして非負整数をパラメータとする無個の 2 項演算を定義するかを知ることができると予想される。つまり，(1)で構成した関手による P-代数の像の構造を詳しく調べることにより，その普遍的な性質を選び出し，その後，その性質をもとにして，P-代数の積を定義する。第一の障害はこのようにして定義した無限個の積が P-代数を定義することを確かめることである。ここでは，既に定義した P-代数の積を関手から得られる Lie 環と同型になるように構成した。このとき，(1)の代数関係式から無限個の積は P-代数を定義することが証明される。

(3) P-代数の積を考察すると 4 変数多項式 F が頻繁に現れる。また，conformal 代数と P-代数の対応にもこの多項式の存在は不可欠であると考えられた。よって，多項式 F のもつ対称性，F の関係する恒等式を組織的に調べることと目的の達成はほぼ同値であると推測された。さらに，多項式 F は多くの代数構造において基本的な役割を担っている兆候が見られた。この意味でも，多項式 F の今後の研究は興味深い。

平成 25 年度は以上の具体的な研究を実施した。
(3)平成 26 年度以降
平成 25 年度に得られた成果，PGC 代数の圏と非負の整数で次数付けされた primitively generated な graded Lie 環の圏の圏同値の成立を踏まえて平成 26 年度以降の研究方法を述べる。

平成 26 年度以降ではこの圏同値を用いて conformal 代数の分類を対応する Lie 環の分類表現を用いて詳細に調べた。特に，有限次元単純 Lie 環の表現論はよく知られているので，それに対応する conformal 代数の分類を実施した。さらに，階数有限 (primitive 要素が有限個である。) である conformal 代数の分類は V. Kac によって得られている。本研究計画ではこの分類を階数有限な Lie 環の分類に帰着するすることができる。また，我々の結果は方法は super conformal 代数の場合にも自然に成立するので，この事実を用いて階数有限な super Lie 環の分類を用いて実現することができると考えられる。さらに重要と考えられるのは conformal 代数の表現論の展開である。例えば，有限次元単純 Lie 環，アフィン Lie 環の可積分表現，Virasoro 代数の極小表現などは詳しく調べられているので，対応する conformal 代数の表現を論じることができる。もっとも，対応する conformal 代数が何であるかは別の問題である。

最も興味深いと考えられるのはアフィン Lie 環の可積分表現，Virasoro 代数の極小表現に対応する conformal 代数を決定することである。上述したように，フィン Lie 環の可積分表現の圏から conformal 代数の圏への関手を構成するために必要なのは，conformal 代数の圏からの関手の像として得られる Lie 環の構造を詳しく調べることである。この関手の作り方から，Lie 環の構造には無限個の 2 項演算の構造が含まれている。その構造を明確にして，一般の Lie 環から無限個の積を定義する。一旦，無限個の積が定義されるとこれは関手の像である Lie 環の構造を含んでいるので P-代数あるいは conformal 代数への関手の具体的な像を構成することができた。

## ４．研究成果

予想される結果は，PGC 代数の圏と非負の整数で次数付けされた PGL の圏の圏同値である。この結果を得ることができれば，階数有限な conformal 代数の表現の圏は階数有限な Lie 環の表現の圏と圏同値であり，階数有限な conformal 代数の表現の分類を Lie 環の表現に帰着させることができる。また，この成果は階数無限な場合にも適応できるので， conformal 代数の表現の分類に有効である。さらに， super conformal 代数の場合にも自然に成立すると思われるので，この事実を用いて V. Kac の分類結果を再度検証することができる。

## ５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者は下線）

〔雑誌論文〕（計　3　件）
(1) Characterization of the simple Virasoro vertex operator algebras with 2 and 3-dimensional space of characters, to appear in Contemp.Math.
Y.Arike, K.Nagatomo, Y.Sakai,

(2) Affine vertex operator algebras and modular linear differential equations, Y. Arike, M. Kakeko, K. Nagatomo, Y.Sakai, Lett. Math. Phys., no. 5, **106**, 693-718 (2016)
(3) Classification of vertex operator algebras with central charge 1/2 and -67/8, K. Nagatomo, Y. Sakai, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.,**92**, no. 2, 33-37, (2016)
(3) Conformal field theories, modular functors and modular tensor categories, K. Nagatomo, Sugaku Expositions, **28**, no. 1, 95-123,(2015)

〔学会発表〕（計　4　件）
(1) Characterization of the minimal series of Virasoro vertex operator algebras, K. Nagatomo, Vertex Algebra and Quantum Groups, February 7--12, 2016, Banff International Research Station, Banff Center, Alberta, Canada
(2) Modular forms, 3rd order ordinary linear differential equations and affine vertex operator algebras, K. Nagatomo, Representation XI, Dubrovnik, Croatia, 2015 年 7 月.
(3) Classification of vertex operator algebras with central charge 1/2 and -67/8, K. Nagatomo, Lie algebras, vertex operator algebras, and related topics, University of Notre Dame, USA , 2015 年 8 月 14-18 日.
(4) 4th order modular linear differential equations and minimal models, K. Nagatomo, Vertex Operator Algebras and related Topics, Sichuan University, Chengdu, China, 2015 年 9 月 1 日.

〔図書〕（計　0　件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計　0　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計　0　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等
http://www.math.tsukuba.ac.jp/arike/MinimalModelMLDE.pdf

６．研究組織
(1)研究代表者
永友　清和 (NAGATOMO, Kiyokazu)
大阪大学・大学院情報科学研究科・准教授
研究者番号：9017253

(2)研究分担者
( )

研究者番号：

(3)連携研究者
( )

研究者番号：

(4)研究協力者
( )