様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ３０ 年　 ６ 月 １８ 日現在

機関番号： １２１０２
研究種目： 挑戦的萌芽研究
研究期間： 2014～2017
課題番号： ２６６１００１２

研究課題名（和文）曲率が上に有界なホモロジー多様体に対する幾何学的トポロジーの展開

研究課題名（英文）Developments of the geometric topology of homology manifolds with curvature bounded above

研究代表者
永野　幸一（NAGANO, Koichi）

筑波大学・数理物質系・講師

研究者番号：３０３３３７７７

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　1,500,000円

研究成果の概要（和文）：CAT(k)空間に代表される曲率が上に有界な距離空間に対して，リーマン幾何学と幾何学的トポロジーの観点から，CAT(k)ホモロジー多様体の幾何構造を計量幾何学的に研究することによって幾何学的トポロジーを展開した．主に，CAT(k)空間上のリーマン微分構造の研究，CAT(k)空間上のリーマン体積測度の研究， CAT(k)空間に対する測度付きグロモフ・ハウスドルフ収束に関するプレコンパクト性の研究について取り組み，研究協力者であるAlexander Lytchak氏（ケルン大学）とともに汎用性の高い研究成果を得た．

研究成果の概要（英文）：For spaces with curvature bounded above, especially CAT(k) spaces, from viewpoints of Riemannian geometry and geometric topology, I have expanded the geometric topology of homology manifolds with curvature bounded above by studying the geometric structure metrically. I have mainly attempt to study the Riemannian differentiable structure on CAT(k) spaces, the Riemannian volume measure on CAT(k) spaces, the precompactness of CAT(k) spaces with respect to the measured Gromov-Hausdorff topology, and I have obtained several versatile research results as joint works with Alexander Lytchak (University of Cologne).

研究分野： 微分幾何学，リーマン幾何学

キーワード： 幾何学　リーマン幾何（含幾何解析）　CAT(k)空間　アレキサンドルフ空間　ホモロジー多様体

１．研究開始当初の背景

A. D. Alexandrov を嚆矢とする曲率が上に有界な距離空間の理論は，1980 年代終盤に Gromov が提唱した幾何学的群論の基礎にもなっており，測度距離空間上の幾何解析など多方面からその価値が再認識されている．特に,大域的に曲率が k 以下である距離空間は，CAT(k)空間と呼ばれ，主要な研究対象になっている．例えば，完備リーマン多様体が CAT(k)空間であることと，断面曲率が一様に k 以下，かつ単射半径が定曲率 k の空間形の直径以上であることは必要十分である．

一般に，CAT(k)空間は複雑で野生的な幾何構造を持つ.具体的には,Kleiner (Math. Z., 1999) によって局所コンパクトで測地的完備な２次元CAT(k)空間でも多面体構造を許容するとは限らないことが指摘され，研究代表者（J. Math. Soc. Japan, 1999）によってその具体例が構成された．その一方で，CAT(k)空間は，距離関数などの凸関数を豊富に有しており，弱い意味で微分構造を許容する場合が多い．また，任意の有限次元単体複体の幾何学的実現はCAT(1)距離を許容する.任意のCAT(k)空間は局所可縮であり，ANR（絶対近傍レトラクト）である．リーマン幾何学と幾何学的トポロジーの観点から，CAT(k)ホモロジー多様体を舞台として，CAT(k)空間の幾何構造を研究することは極めて自然である．

研究開始当初は，研究代表者と Lytchak 氏（ケルン大学）による一連の共同研究によって，関連する以下の性質が証明されていた．

(1) CAT(k)空間の微分構造

局所コンパクトで測地的完備な n 次元 CAT(k)空間は，n 次元ハウスドルフ測度に関してほとんどいたるところ,DC 級の微分構造と付随する BV 級リーマン構造を許容する．ここで，関数が DC 級であるとは 2 つの凸関数の差として表されるときにいい,BV 級であるとは局所有界変動であるときにいう．

(2) CAT(k)空間の局所位相正則性

未解決であった A. D. Alexandrov の問題は肯定的である．すなわち，局所コンパクトで測地的完備なCAT(k)空間Xがn次元位相多様体であることと，X の任意の点における方向空間（X がリーマン多様体であれば単位接球面に相等）が(n-1)次元球面とホモトピー同値であることは必要十分である．この場合,その点における接錐（X がリーマン多様体であれば接空間に相等）はn次元ユークリッド空間と同相である．

(3) CAT(k)ホモロジー多様体の局所錐性

CAT(k)ホモロジー多様体の任意の点は局所錐的である．より詳しくは，n次元CAT(k)ホモロジー多様体の任意の点は，ある位相空間上の錐と同相な近傍を持つ．ただし，5 次元の場合は，ある位相的な障害を除く．

２．研究の目的

本研究では，リーマン幾何学と幾何学的トポロジーの両者の観点から，CAT(k)空間の幾何構造の研究を行い，CAT(k)ホモロジー多様体に対して幾何学的トポロジーを展開した．以下では，研究開始当初の本研究の主な目標を具体的に３つ列挙する．なお，CAT(k)ホモロジー多様体は，局所コンパクトであり，測地的完備であることに注意する．

(1) CAT(k)空間のリーマン微分構造.

次の予想が解決されると，リーマン幾何学のより高度な手法を用いて，CAT(k)ホモロジー多様体を計量的に研究することができる．

予想 1．n 次元 CAT(k)ホモロジー多様体 X 上には，n 次元ハウスドルフ測度に関してほとんど至るところ,DC 級の微分構造 D と付随する BV 級リーマン構造 G が存在して,G から定まるリーマン弧長距離構造は元々の X の距離構造と一致する．

この予想は，大津・塩谷（J. Differential Geom., 1991)，Perelman（preprint, 1994)，桑江・町頭・塩谷（Math. Z., 2001）による曲率が下に有界なアレキサンドルフ空間に対する微分構造の研究の類似である．

(2) CAT(k)空間の無限小位相正則性.

CAT(k)空間の局所位相正則性の無限小版として，次が成立することが期待できる．

予想 2．局所コンパクトで測地的完備な CAT(k)空間の点 x が n 次元多様体点であることと，点 x における方向空間が(n-1)次元球面とホモトピー同値であることは必要十分である．ここで，点 x が n 次元多様体点であるとは，点 x が n 次元ユークリッド空間と同相である開近傍を持つときにいう．

この予想が 2 次元の場合に正しいことは，研究代表者（Pacific J. Math., 2002）により示されている．

(3) CAT(0)位相多様体の端の研究.

次は Gromov(1981)による予想に基づくが，研究代表者が知る限り未解決である．

予想 3．(Gromov) 4 次元 CAT(0)位相多様体は 4 次元ユークリッド空間と同相であろう．

Gromov のこの問題は,P. Thurston(J. Geom. Anal., 1996) により，ある位相的な仮定のもとで，肯定的に解決されている．一方で，Davis-Januszkiewicz（J. Differential Geom., 1991）により，5 以上のすべての自然数 n に対して，幾何学的群論の見地から，n 次元ユークリッド空間と同相でない n 次元 CAT(0)位相多様体が構成されている．

３．研究の方法

（1）CAT(k)空間のリーマン微分構造.

予想１を詳しく述べると次の通りである.

予想 A. n 次元 CAT(k)ホモロジー多様体 X に対して，X の開集合 M が存在して，以下の性質を満たす.(a) M は DC 級リプシッツ多様体であり,M の DC 級微分構造 D に付随するリーマン構造 G は BV 級である.(b) M の補集合は n 次元ハウスドルフ測度ゼロである.(b) BV 級リーマン構造 G から定まるリーマン弧長距離構造は元々の X の距離構造と一致する.

Lytchak-研究代表者の従来の共同研究により，CAT(k) ホモロジー多様体の位相的特異点集合は高々局所有限であるので，予想 A が期待できる．なお，曲率が下に有界な有限次元アレキサンドルフ空間の内部では，大津・塩谷（J. Differential Geom., 1991）の微分構造の研究により，ある(弱い意味の)リーマン構造から定まるリーマン弧長距離構造は元々の X の距離構造と一致する.

（2）CAT(k)空間の無限小位相正則性.

予想２を解決するためには，CAT(k)ホモロジー多様体に対する次の安定性が鍵となる.

予想 B. 局所コンパクトで測地的完備な点付き CAT(k)空間の列(X_i, x_i)が，点付き n 次元ホモロジー多様体(X, x)に点付きグロモフ・ハウスドルフ位相に関して収束するならば，十分大きいすべての i に対して，CAT(k)空間 X_i は n 次元ホモロジー多様体である.

Grove-Petersen-Wu（Invent. Math., 1990）の LGC 空間（局所幾何学的可縮空間）の研究により，点付き n 次元 CAT(k)ホモロジー多様体の列が，点付き空間に点付きグロモフ・ハウスドルフ位相に関して収束すれば，極限空間は n 次元 CAT(k)ホモロジー多様体である.

（3）CAT(0)位相多様体の端の研究.

前述したように P. Thurston（J. Geom. Anal., 1996）により，4 次元 CAT(0)位相多様体は，ある点を中心とするすべての距離球面が 3 次元位相多様体であれば，4 次元ユークリッド空間と同相であることが示された．予想３の解決のために,次の問題に取り組む.

予想 C. n 次元 CAT(k)ホモロジー多様体の任意の距離球面の任意の点において，距離球面の十分小さいすべての距離球面は(n-2)次元ホモロジー多様体であろう.

仮にこの予想が肯定的に解決できれば，Daverman-Preston（Proc. Amer. Math. Soc., 1980）によるスライス分解定理を効果的に用いると，先に述べた P. Thurston の研究を経由することで,予想３が証明できるであろう.

４．研究成果

（1）CAT(k)空間のリーマン微分構造.

ここで述べる CAT(k)空間のリーマン微分構造に関する研究成果は，いずれも Lytchak 氏（ケルン大学）との共同研究による.

予想 1 を含む予想 A を肯定的に解決して，以下のように最も一般的な形で CAT(k)空間の構造定理を定式化することに成功した.

定理．すべての自然数 m と，すべての局所コンパクトで測地的完備な CAT(k)空間 X に対して，X の m 次元部分集合 X^m と，X^m の部分集合 M^m を定式化することができて，以下の性質（1）-（4）を満たす.（1）点 x が集合 X^m に属することと，点 x が十分小さいすべての距離球体が m 次元であることは必要十分である．さらに，集合 X^m 上で m 次元ハウスドルフ測度は局所有限かつ局所正値である.（2）集合 M^m は，X の開集合であり，X^m 内で稠密であり，m 次元リプシッツ多様体である．さらに，X^m の閉包 cl(X^m)と M^m の差集合 cl(X^m)-M^m のハウスドルフ次元は m-1 以下である.(3)集合 M^m は,方向空間が(m-1)次元単位球面と等長的であるような X の点全体からなる集合 R^m を含み，M^m と R^m の差集合 M^m-R^m のハウスドルフ次元は m-2 以下である.（4）集合 M^m は，DC 級 m 次元リプシッツ多様体であり,M の DC 級微分構造 D に付随するリーマン構造 G は M^m 上 BV 級であり，R^m 上連続である．さらに，M^m 上の BV 級リーマン構造 G から定まる M^m 上のリーマン弧長距離構造は元々の X の距離構造と一致する.

この定理は，大津・田上（preprint, 1999）による微分構造の研究の大幅な拡張になっている．定理の主張中に現れる幾何学的特異点集合である cl(X^m)-M^m や M^m-R^m のハウスドルフ次元の評価は，いずれも最適である．これまでの Lytchak-研究代表者の研究により，幾何学的特異点集合 cl(X^m)-M^m および M^m-R^m は，それぞれ(m-1)次元ハウスドルフ測度および (m-2)次元ハウスドルフ測度に関して局所的に求長可能である.

測度距離空間の幾何解析の現代的な観点から，Lytchak-研究代表者は，局所コンパクトで測地的完備な CAT(k)空間上に，次の意味で自然な体積測度を構成した.

定理．局所コンパクトで測地的完備な CAT(k)空間 X に対して，局所有限かつ局所正値な正則ラドン測度が一意的に定まり，その測度を X の m 次元部分集合 X^m に制限すると通常の m 次元ハウスドルフ測度に一致する.

以下では，この定理中の測度を標準体積測度と呼ぶ．Lytchak-研究代表者は，測度付きグロモフ・ハウスドルフ位相に関して，次のプレコンパクト性定理を得た.

定理．コンパクトで測地的完備なCAT(k)空間列に対して，その標準体積測度が一様有界であることと，測度付きグロモフ・ハウスドルフ位相に関してプレコンパクトであることは必要十分である．

この定理は，研究代表者（Math. Z., 2002）による CAT(k)空間に関する体積収束定理を測度距離空間の幾何解析の現代的な観点から大幅に拡張した研究成果である．同様に，局所コンパクトで測地的完備な CAT(k)空間列に対しても，点付きグロモフ・ハウスドルフ位相版のプレコンパクト性定理を定式化することができる．

さらに，Lytchak-研究代表者は，CAT(k)空間のリーマン微分構造に関して，次の２階微分可能性定理を証明した．

定理．局所コンパクトで測地的完備なCAT(k)空間上の任意の DC 級関数 f に対して，標準体積測度に関してほとんど至るところヘッシアンが定義でき，f はアレクサンドルフ（テイラー展開）の意味で２階微分可能である．

この定理は，Perelman（preprint, 1994）による曲率が下に有界なアレクサンドルフ空間のリーマン微分構造に関する２階微分可能性定理の類似である．

Lytchak と研究代表者は，一連の共同研究の端緒として，ここで述べたCAT(k)空間のリーマン微分構造に関する研究成果，これまで得ていた CAT(k)空間に対する特異点集合の求積可能性定理，距離球面のホモトピー安定性定理などを含む次の共著研究論文を本研究期間内に執筆して公開している．

① Alexander Lytchak and Koichi Nagano, Geodesically complete spaces with an upper curvature bound, arXiv.org, preprint, 2018, 1-40, 査読無. http://arxiv.org/abs/1804.05189

この論文で述べられているLytchak氏との共同研究の成果は，いずれもCAT(k)空間に代表される曲率が上に有界な距離空間の計量構造や位相構造に関する汎用性の高い研究成果である．将来的に，曲率が上に有界なホモロジー多様体の幾何学的トポロジーや幾何解析の発展に貢献することが期待される．

(2) その他の研究成果．

CAT(k)空間の無限小位相正則性について，予想２の解決の鍵となり得る予想Ｂに取り組み，関連する部分的な研究成果を得ている．また，CAT(0)位相多様体の端の研究として，予想３の解決の鍵となり得る予想Ｃに取り組み，関連する部分的な研究成果を得ている．これらの研究についても，今後も継続的に取り組み，研究成果を公表する予定である．

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計１件）

① Alexander Lytchak and Koichi Nagano, Geodesically complete spaces with an upper curvature bound, arXiv.org, preprint, 2018, 1-40, 査読無.
http://arxiv.org/abs/1804.05189

〔学会発表〕（計０件）

〔図書〕（計０件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計０件）

○取得状況（計０件）

６．研究組織

(1)研究代表者

永野　幸一　（NAGANO Koichi）
筑波大学・数理物質系・講師
研究者番号：３０３３３７７７

(2)研究協力者

Alexander Lytchak　（LYTCHAK, Alexander）
ケルン大学（ドイツ）