

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 5 月 30 日現在

機関番号：12608

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2014～2016

課題番号：26610014

研究課題名(和文)無限型リーマン面とその変形空間の新たな展望

研究課題名(英文) New perspective on Riemann surfaces of infinite genus and their deformation spaces

研究代表者

志賀 啓成 (SHIGA, Hiroshige)

東京工業大学・理学院・教授

研究者番号：10154189

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,700,000円

研究成果の概要(和文)：Riemann面の変形理論では擬等角写像が重要な役割を果たして来た。本研究ではRiemann面自体の解析的幾何的な普遍量を捉える新たな研究の方向性を志向し、無限型Riemann面の変形を用いて、Sullivan-Thurstonによる擬等角運動の定理の反例を構成した。

また、Riemann面上の正則運動がリーマン球面の正則運動に拡張できるための必要十分条件をmonodromyで与えた。

さらに、Riemann面とその上の可算無限個の点集合に新しいタイヒミュラー空間を導入した。これらの研究は、無限型Riemann面と正則運動を一般化・進展させる起点となり、興味ある研究課題を提起する。

研究成果の概要(英文)：On the deformation theory of Riemann surfaces, quasiconformal maps have played an important role. In this project, we succeeded in constructing a counterexample of Sullivan-Thurston's claim for quasiconformal motions. We also give a necessary and sufficient condition for a holomorphic motion of a subset of the Riemann sphere parametrized over a Riemann surface to be extended to a holomorphic motion of the Riemann sphere. The condition is given by the monodromy of the motion. This result is related to quasiconformal maps but it has also a topological aspect, the monodromy.

A new concept of Teichmüller space for Riemann surface with countably many points is considered. The research of those Teichmüller spaces will generalize holomorphic motions to those of subsets of Riemann surfaces. Therefore, it will give new interesting problems to related fields of mathematics.

研究分野：数物系科学

キーワード：関数論 トポロジー Hyperbolic geometry Teichmüller space Riemann surface

1. 研究開始当初の背景

コンパクトなリーマン面または有限型リーマン面では、その変形空間、すなわち Teichmüller 空間においては同じ位相型のリーマン面全体がその対象として論じられる。しかし、無限型リーマン面においては状況は異なる。端的に言えば、位相同型、微分同相という範疇でリーマン面を集めては、空間として大き過ぎて制御不能になり、そのため擬等角同値という枠組みで Ahlfors-Bers 理論を援用して無限次元 Teichmüller 理論が組み立てられてきた。

一方で、応募者の 2003 年の論文で最初に指摘したように、これを曲面の双曲構造の変形と見た時に、この枠組みは不十分であることがわかってきた。そのことが認識されると、Teichmüller 空間を設定するのに擬等角写像を用いる必然性は弱まる。実際、研究協力者の A. Papadopoulos らは応募者の結果を受けた形で新たに Teichmüller 空間の枠組みを設け、研究が行われつつある。一方で、無限型リーマン面それ自身では、斎藤恭司氏 (IPMU) が Kontsevich による Witten 予想の解決に触発されて無限種数の超楕円型リーマン面の研究を進めている。

したがって、このような無限型リーマン面の変形空間の研究を進める事は、現在大いに意義深いものと考えられ、しかも上で述べたように、その理論構築に新しい枠組みが必要となってきた。これが本研究を着想するに至った経緯である。

2. 研究の目的

無限型リーマン面は、その分類理論が示すように、複素解析的にもポテンシャル論的にも極めて豊富な多様性を持っている。したがって、その多様性はその変形空間にも及ぶはずである。しかし、これまでの変形理論の枠組みは、それを捉えてはいないし、理論構築

としても十分とは言えない。それは有限型リーマン面での理論が強力であるがゆえに、その手法に捕われすぎているためだと考える。実際、申請者は双曲構造の変形については、これまでの Teichmüller 空間の理論では不十分であることを示し、それを可能にする十分条件を提示した。

本研究は、このような申請者らの研究を基点にして、無限型リーマン面それ自身の研究と、その Teichmüller 空間論を新たに構築しようとするものである。

3. 研究の方法

無限型リーマン面それ自身では近年、斎藤恭司氏 (IPMU) が Kontsevich による Witten 予想の解決に触発されて無限種数の超楕円型リーマン面の研究を進めているなどの研究に見られるように複素平面の branched covering として Riemann 面を捉え、この変形は branch points の動きとして記述している。よって、申請者の最近の研究の一つである「正則運動」に関する結果の応用が出来る。これを考察する。

また、変形理論は元々は擬等角写像の概念を用いて定義されているが、これを双曲構造やそのほかの等角普遍量に関する概念を用いて考察する。

4. 研究成果

志賀は、一般の Riemann 面上の種々の調和関数の空間から定義される不変距離について考察し、その値の評価及び完備性について、Riemann 面のポテンシャル論的性質から考察した。また、無限型 Riemann 面の変形を用いて、Sullivan-Thurston による擬等角運動についての定理の反例を構成した。その結果として、tame qc-motion という新しい概念を創出し、これに関してパラメーター空間が高次元単連結多様体の場合に拡張定理を証明し

た。

この応用として、Klein 群の変形の擬等角不変性について新たな知見を得た。これは無限型リーマン面を表現する Klein 群の運動にも適用可能で、従来にない新しい結果である。

また、Riemann 面上の種々の等角不変計量についての研究、特にポアンカレ計量との比較を行い、様々な不等式を導き、その等号成立条件について考察した。なかんずくハルナック距離についてはマルティンコンパクト化の観点から研究し、その完備性について新たな結果を得た。

また、Klein 群の変形空間について、その複素解析的性質を明らかにした。さらに Riemann 面をパラメータ空間とする正則運動がリーマン球面の正則運動に拡張できるための必要十分条件を正則運動の monodromy を用いて与えた。これは擬等角変形の枠組みの中の研究ではあるが、monodromy というトポロジカルな概念から考察を加えたものである。

藤川は、以前の論文 (E. Fujikawa, Michigan Math. J. 54 (2006), 269–282) で証明した双曲リーマン面の漸近的等角写像による閉測地線の長さの変化に関する Solvari-Wolpert 型定理を用いて、漸近的 length spectrum タイヒミュラー空間についての基本的性質を考察した。また、Riemann 面とその上の可算無限個の点集合の組みに対する擬等角変形空間を考案し、新しいタイヒミュラー空間を導入した。そして、このタイヒミュラー空間が複素構造を持つ状況について考察した。

これは Riemann 面と可算無限個の点集合に対するある幾何学的な条件下で可能であり、実際、点集合の外部として得られる無限型 Riemann 面に対するタイヒミュラー空間の複素構造から自然に誘導されるものである。この研究は、上述の正則運動をさらに一般化し

て、これを Riemann 面の集合に対するものへと進展させる研究の起点になるものである。同時に点集合の可算無限性を非可算にすることなどで Riemann 面の複雑性をさらに増す場合の問題など、興味ある研究課題を提起することにもなった。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 5 件) すべて査読有

- (1) H. Shiga, Conformal invariants defined by harmonic functions on Riemann surfaces, J. Math. Soc. Japan 68 (2016), 441–458.
DOI:10.2969/jmsj/06810441
- (2) H. Shiga, On analytic properties of deformation spaces of Kleinian groups, Trans. Amer. Math. Soc. 368 (2016), 6627–6642.
<https://doi.org/10.1090/tran/6563>
- (3) Ege Fujikawa and Masahiko Taniguchi, The Teichmüller space of a countable set of points on a Riemann surface, Conform. Geom. Dyn. 21 (2017), 64–77.
<https://doi.org/10.1090/ecgd/301>
- (4) H. Shiga, Holomorphic families of Riemann surfaces and monodromy, Handbook of Teichmüller Theory Volume IV, IRMA Lect. Math. Theor. Phys. 19 (2014), 439–460.
DOI:10.4171/117
- (5) L. Lui, H. Shiga and Z. Sun, Convex hull of set in thick part of Teichmüller space, Sci. China Math. 57 (2014), 1799–1810.

[学会発表] (計 10 件) すべて招待講演

- (1) H. Shiga, Holomorphic motions and the extension problem, 「リーマン面・不連続群論」研究集会, 2017-01-09, 東北大学片平キャンパス (仙台市青葉区)
- (2) H. Shiga, Holomorphic motions over Riemann surfaces and the extension problem, Topology related to Riemann surfaces, 2016-09-05, The University of Tokyo, Meguro, Tokyo (Japan)
- (3) H. Shiga, Holomorphic motion over Riemann surface and monodromy, XVIII th Conference on Analytic Functions and related Topics, 2016-06-28, Institute of Mathematics and Computer Science of the State School of Higher Education in Chelm (Poland)
- (4) H. Shiga, Tame qc-motions and the monodromy, AMS Spring Eastern Sectional Meeting, Special Session on Teichmüller Theory and Related Topics, 2016-03-20, State University of New York at Stony Brook, Stony Brook, NY (USA)
- (5) H. Shiga, Teichmüller spaces and holomorphic maps, Riemann surfaces and related topics, 2015-06-02, Universidad Autonoma de Madrid, Madrid (Spain)
- (6) 志賀啓成, Klein 群の変形空間について, 日本数学会(特別講演), 2015-03-23, 明治大学駿河台キャンパス (東京都千代田区)

- (7) H. Shiga, Complex analytic properties of deformation spaces of Kleinian groups I & II, 低次元多様体モジュライ空間の幾何学, 2014-12-11, 京都大学数理解析研究所 (京都市左京区)
- (8) H. Shiga, Conformal invariants defined by harmonic functions on Riemann surfaces, Conference of Potential theory, 2014-09-04, 福山大学宮地茂記念館 (広島県福山市)
- (9) H. Shiga, Teichmüller curves and holomorphic maps on Riemann surfaces, Geometry on Groups and Spaces, ICM Satellite Conference on Geometric Group Theory & Geometric Structures, 2014-08-09, KAIST, Daejeon (Korea)
- (10) H. Shiga, On analytic properties of deformation spaces of Kleinian groups, XVII th Conference on Analytic Functions and Related Topics, 2014-06-29, Institute of Mathematics and Computer Science of the State School of Higher Education in Chelm (Poland)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

志賀 啓成 (SHIGA, Hiroshige)
東京工業大学・理学院数学系・教授
研究者番号: 10154189

(2) 研究分担者

藤川 英華 (FUJIKAWA, Ege)
千葉大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号: 80433788

以上