様　式　C－１９、F－１９－１、Z－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ３０ 年　 ９ 月　 ５ 日現在

機関番号：１３９０１
研究種目：挑戦的萌芽研究
研究期間：2014～2017
課題番号：２６６１００１５

研究課題名（和文）スカラー平坦完備ケーラー計量と無限遠のK安定性

研究課題名（英文）Scala-flat complete Kaehler metrics and K-stability at infinity

研究代表者
小林　亮一（Kobayashi, Ryoichi）

名古屋大学・多元数理科学研究科・教授

研究者番号：２０１６２０３４

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,000,000円

研究成果の概要（和文）：代数的極小曲面を普遍被覆面である円板と自由Fuchs群の作用と周期条件の3つ組に変換することによって．すべての代数的極小曲面を統一的に扱う理論をつくった．固定された基本領域に自由Fuchs群を働かせるとワード長とともに基本領域が増加し単位円周上の頂点集合が増加する．これは一定の性質を備えた力学系である．この性質を放物型局所化原理として抽出した．周期条件を暗号化する有理型関数exp(H)と潜在的無限次のリーマン球面上の因子Dの組を導入した．放物型局所化原理によりガウス写像はDに対し最大近似状態にある．組(exp(H),D)に対数微分補題を働かせて得られる結果は周期条件を解読したものである．

研究成果の概要（英文）：By replacing an albebraic minimal surface by the triple consisting of the disc (the universal cover), the action of free Fuchsian group (fundamental group) and the period condition, we formulate a theory for all algebraic minimal surfaces. By applying the free Fuchsian group to a fixed fundamental domain, we get a dynamical system on the circle consisting of increasing number of vertices of fundamental domains whose evolution is governed by increasing word length. The properties of this dynamical system was formulated as the parabolic localization principle. I propose a pair of a meromorphic function exp(H) and a potentially infinite degree divisor D on the Riemann sphere, (exp(H),D), which encodes the period condition. The parabolic localization principle implies that the Gauss map is in the maximal approximation state relative to D. So is exp(H). It follows that the LLD (lemma on log derivative) applied to the pair (exp(H),D) decodes the period condition.

研究分野：複素幾何学

キーワード：代数的極小翼面　周期条件　自由フックス群　放物型局所化原理　ネヴァンリンナ理論　対数微分補題　ガウス写像　力学系

以下，**(A) 代数的極小曲面の Gauss 写像の Osserman 理論の量子化**（未発表論文 [1] [5]，国際会議発表 [1], [2], [3], [4]）と **(B) スカラー平坦完備 Kähler 計量と無限遠の K 安定性**（未発表論文 [2],[3],[4] 出版予定図書 [1]）という 2 つの研究テーマに分けて述べる．(A), (B) はこの意味である．

1. 研究開始当初の背景. (A) 有限全曲率の $\mathbb{R}^3$ 内にはめこまれた完備極小曲面 M の共形構造は有限穴あき compact Riemann 面 $M = \overline{M} \setminus \{P_1, \ldots, P_{n(M)}\}$ である．これを代数的極小曲面とよぶ．Osserman が代数的極小曲面の Gauss 写像の除外値数は高々3 であることを 1964 年に証明して以後，除外値数 2 以下の代数的極小曲面は発見されているが，除外値 3 があり得るかどうかは未解決である．

(B) Tian, Donaldson は，幾何学的不変式論における簡約群作用に関する安定な点という概念を「偏極射影代数多様体 (X, L) の場合に偏極 L が標準計量を許容するか？」という問題と関連させて，偏極射影代数多様体の K-安定性とよばれる概念を導入した．X を小平埋め込みにより射影空間 $\mathbb{P}(H^0(X, L^{\otimes k})^*)$ に埋め込んで $\mathrm{GL}(h^0(X, L^{\otimes k}) + 1)$ の 1 パラメータ部分群 $(\cong \mathbb{C}^*)$ による像を集めて $\mathbb{C}^*$ 作用に関する同変コンパクト化をとって得られる $\mathbb{C}$ 上の族 $\mathcal{X}$ $(\mathcal{X}_1 = X)$ をモデルに定義されるテスト配位とよばれる族の中心ファイバーにおける $\mathbb{C}^*$ 作用のふるまいを見て定義される概念である．Donaldson-Tian-Yau 予想は「偏極 L が cscK 計量を含むこと」と「K 安定であること」が同値である，という予想である．K 安定性の概念では cscK 計量を近似するような射影埋込の列は退化とは無縁のきれいな埋め込みであるに違いないのに，なぜその対極にある退化した埋め込み（テスト配位の中心ファイバー）の性質を cscK 計量の存在に関連させるのかと言うと，cscK 計量を K-energy という汎関数の最小点として特徴づけたいからである．そこで，このアプローチでは Kähler 計量の空間における種々の凸性概念の研究が本質的になる．この流れの中で Donaldson-Chen-Sun と Tian はほぼ同様の方法で偏極が反標準束の場合に予想が正しいことを証明した．偏極が反標準束ならば，問題は Monge-Ampère 方程式の解析，幾何的には Ricci 曲率の解析に帰着することが本質的である．しかし，偏極が任意になると Ricci 形式は反標準類に属するのに偏極がそれと無関係であることによって問題が Ricci 曲率の解析に帰着しない．この困難に対し，Szekelyhidi, 満渕はそれぞれ一様 K 安定性，強 K 安定性という強い安定性の概念を導入して，一般偏極での予想解決に向けて研究が進んでいる．しかし，元々の K 安定性のもとで予想は未解決である．

2. 研究の目的. (A) 本研究は，代数的極小曲面の Gauss 写像の値分布論を Osserman 理論の量子化の観点から開拓して，副産物としてこの問題を解決することを目的とする．以後 (g, ω) を M の Weierstrass data とする．Osserman 理論の要は基本比 $R = \int_M g^* \omega_{\mathrm{FS}} / \int_M \omega_{\mathrm{hyp}}$ を Riemann-Roch の定理によって評価し，Gauss 写像 $g : \overline{M} \to \mathbb{P}^1$ に Riemann-Hurwitz の定理を適用して Gauss 写像の全分岐値数を評価することにある．本研究では M を不変被覆面 $\mathbb{D}$ に展開して基本比 R のかわりに半径 r の開円板 $\mathbb{D}(r)$ と交わる基本領域 F_α の個数を重み $\mathrm{A}_{\mathrm{FS}}(F_\alpha \cap \mathbb{D}(r)) / \mathrm{A}_{\mathrm{hyp}}(\mathbb{D}(r))$ つきで数え上げた分配関数 $Z(r)$ を考える．数え上げの前に $r \to 1$ とすると形式的に基本比 R が再現する．本研究では先に数え上げを行ってから $r \to 1$ の極限をとる．$1 - r$ が Planck 定数の働きをする意味で，本研究は Osserman 理論の量子化である．ポイントは，双曲幾何とユークリッド幾何は $\mathbb{D}$ の境界で無限に乖離するから和と極限は非可換であり，量子化により全く異なる数学が出現することにある．Nevanlinna 理論を使って $Z(r)$ の $r \to 1$ での漸近挙動を調べる．したがって問題は 2 つの高さ関数 $T_g(r) = \int_0^t \frac{dt}{t} \int_{\mathbb{D}(t)} g^* \omega_{\mathrm{FS}}$ と $T_{\mathrm{hyp}}(r) = \int_0^r \frac{dt}{t} \int_{\mathbb{D}(t)} \omega_{\mathrm{hyp}} = \frac{1}{2} \log \frac{1}{1-r}$ (as $r \to 1$) の $r \to 1$ における漸近挙動の比較である．

(B) 本研究では，偏極一般化によって X 上の Ricci 曲率（Monge-Ampère 方程式）の解析に帰着できないという困難を，Szekelyhidi や満渕とは異なる方向，すなわち K 安定性の概念を modify することではなく，X を無限遠因子に持つ 1 次元高い Y を導入して $Y \setminus X$ 上のある種の Monge-Ampère 方程式の解の無限遠挙動にうつしかえて，X の K 安定性を位置づけるという方向で研究を行う．

3. 研究の方法. (A) 解かねばならない問題は 2 つある：(i) 自由 Fuchs 群 $\pi_1(M)$ の作用の観点から境界 $\partial\mathbb{D}$ に近づくときの双曲幾何とユークリッド幾何の乖離を Nevanlinna 理論の言葉で記述すること，(ii) 代数的極小曲面を特徴づける周期条件を問題 (i) の解答を使って Nevanlinna 理論で解釈すること．

• 問題 (i) の解答．放物型局所化原理と量子化 Cohn-Vossen 不等式．

（観察）被覆写像 $\pi : \mathbb{D} \to M$ による $\partial\mathbb{D}(r)$ の像 $\pi(\partial\mathbb{D}(r))$ は punctured points $\overline{M} \setminus M$ に「局所化」する．

（理由）放物型局所化原理 (parabolic localization principle)．0 を固定する $\mathbb{H}$ の放物型変換 $T(x) = \frac{x}{x+1}$ の iteration は $T^n(x) = \frac{x}{nx+1}$ である．任意の区間 $I \in \mathbb{R}_+$ に対し $I_n = T^n(I)$ とすると $\mathrm{dist}_{\mathbb{R}}(I_n, 0) = O(n^{-1})$ と $\mathrm{diam}_{\mathbb{R}}(I_n) = O(n^{-2})$．実際 $x, x' \in I$ に対し $T^n(x) - T^n(x') = \frac{x}{nx+1} - \frac{x'}{nx'+1} = \frac{x-x'}{(nx+1)(nx'+1)} = O(n^{-2})$．

（可視化）基本領域を 1 つ固定しワードの長さ $1, 2, 3, \ldots, \ell, \ldots$ の基本群の元を働かせて得られる頂点を $\partial\mathbb{D}$ 上にプロットしていくと $\partial\mathbb{D}$ 上に放物型固定点 P がどんどん増える．放物型固定点 P がプロットされると P のまわりにバリアができて，ワードの長さ ℓ を大きくしたときに現れる放物型固定点たちが P を近似するスピードが速くなりすぎないように押さえる．これが，n^{-1}, n^{-2} というオーダーの違いの可視化である．これは $\sum_{\{\alpha | F_\alpha \cap \mathbb{D}(r) \neq \emptyset\}}$ と $\lim_{r \to 1}$ が可換でない理由でもある．

（定義など）$\pi_1(M)$ の基本領域 F を $\mathbb{H}$ に実現し 0 以外の頂点を含む最小区間 I をとる．$T^n(I)$ を $T^n(F)$ の cluster part とよぶ．$\{T^n(F)\}_{n \in \mathbb{N}}$ を放物列とよぶ．$\mathrm{dist}\,(T^n(I), 0) = O(n^{-1})$, $\mathrm{diam}\,(T^n(I)) = O(n^{-2})$ だから n は $T^n(F)$ のユークリッド的歪み強度である．十分大きい n_θ を固定してユークリッド的歪み閾値と考える．

（命題） 1 つの基本領域内に cluster part は unique.

（命題）cluster part 内は ward length に対して uniform.

（命題）ユークリッド的に歪んでいない基本領域と歪んでいる基本領域が reference domain に $\pi_1(M)$ の word をどのように働かせれば生成されるかを双曲型変換と放物型変換のことばを使って定式化できる．

（命題）$\mathbb{D}(r)$ を覆う基本領域の最小集団に含まれる放物列全体は，ユークリッド直径が $(1-r)^a$, $a = 1 - \frac{2 \log n_\theta}{\log \frac{1}{1-r}}$ のユー

クリッド的歪みのない基本領域を出発する放物列たちによって支配される．

重み $\mathrm{A_{FS}}(F_\alpha\cap\mathbb{D}(r))/\mathrm{A_{hyp}}(\mathbb{D}(r))$ の分母を $\mathrm{A_{hyp}}(F_\alpha\cap\mathbb{D}(r))$ に分解して $Z(r)$ を $\mathrm{A_{FS}}(F_\alpha\cap\mathbb{D}(r))/\mathrm{A_{hyp}}(F_\alpha\cap\mathbb{D}(r))$ の最頻値で近似することを考えると，放物型局所化原理には代数的変分問題が付随していることがわかる．この最頻値問題を解く鍵は次の計量化 Riemann-Hurwitz(RH) 定理である．

（計量化 RH 定理）任意の代数的極小曲面 M に対し，$P\in\overline{M}\setminus M$ における局所パラメータ ζ であって $g^*\omega_{\mathrm{FS}}^{\mathrm{modified}}$ と ω_{hyp} に対し $g^*\omega_{\mathrm{FS}}^{\mathrm{modified}}\geq 4|d\zeta|^2$ と $\omega_{\mathrm{hyp}}\leq\frac{4|d\zeta|^2}{|\zeta|^2(\log 2|\zeta|^{-2})^2}$ が成り立つようなものが存在する．ここで $\omega_{\mathrm{FS}}^{\mathrm{modified}}$ は「枕カバー計量」すなわち半径 $\sqrt{2}$ のユークリッド円板 2 枚を境界で貼り合わせたものを滑らかな S^2 の計量で近似したものを意味する．

（代数的変分問題の解）$r\to 1$ のとき $\frac{\mathrm{A_{FS}}(F_\alpha\cap\mathbb{D}(r))}{\mathrm{A_{hyp}}(F_\alpha\cap\mathbb{D}(r))}$ の最頻値は $2e^{-1}$ に漸近する．

（量子化 Cohn-Vossen 不等式）$r\to 1$ のとき漸近的に $T_g(r)\geq 2e^{-1}\,T_{\mathrm{hyp}}(r)$（$T_g(r)\geq e^{-1}\log\frac{1}{1-r}$ と同値）．

● 問題 (ii) の解答．周期条件を量子化するために放物型局所化原理を Nevanlinna 理論で解釈する．

解釈 1. $\mathbb{D}$ の線型パラメータ z と punctured point のまわりの局所パラメータ ζ の間の特異座標変換の言葉で $m_{g^{(1)},S_\infty}(r)-m^{\zeta}_{g^{(1)},S_\infty}(r)\geq\log\frac{1}{1-r}$ と解釈できる．$g^{(1)}$ は $T\mathbb{P}^1$ 値と考えて ω_{FS} で零および無限大切断への近似を評価．

解釈 2. Gauss 写像の ∞ への近似の強さの言葉で $N_{g,\infty}(r)=o(T_g(r))$ と解釈できる．なお，∞ は計量化 RH 定理に現れる枕カバー計量由来であって選択の余地はない．

解釈 3. 誘導計量の完備性の言葉で $m_{h,S_\infty}(r)=2\,T_g(r)$ と解釈できる．ただし h は ω の関数部分 $\omega=h(z)dz$ または $\omega=h(\zeta)d\zeta$ 文脈による．

（周期条件の言い換え）Weierstrass-Enneper 表現公式に現れる $(1-g^2,i(1+g^2),2g)$ はつねに 3 成分同時に考えねばならない．この問題点は，正規直交基底とする 3 次元実ベクトル空間 $V:=\mathbb{R}(1-g^2)\oplus\mathbb{R}i(1+g^2)\oplus\mathbb{R}(2g)$ の単位球面 $\mathbb{S}$ から g の 2 次式 $p(g)$ をランダムにとって出てきた結果を $\mathbb{S}$ の不変測度で平均するという議論を行えば解消する．$H(z):=\int_{z_0}^{z}p(g)\omega$ は $\mathbb{D}$ 上の正則関数である．周期条件から，M 上で考えると純虚周期しか持たない．したがって周期条件 $\Leftrightarrow |e^H|$ は $\pi_1(M)$ の作用で不変．$g:\mathbb{D}\to\mathbb{P}^1$ を $\mathbb{D}(r)$ に制限して極での e^H の値を集めて $\mathbb{P}^1$ と因子を考える．$r\to 1$ とするとこの因子の次数は ∞ になるが，$\mathcal{D}$ と書いて通常の因子のように考えることにする．$\mathcal{D}$ を考える理由は，$p(g)$ の極の位置は $p(g)\in\mathbb{S}$ の取り方に関係なく決まるからである．

Nevanlinna 理論は超越的正則曲線と因子の交点理論だから「近づくが交わらない」という状況から重要な不変量を導く幾何学である．放物型局所化原理の Nevanlinna 理論解釈に $N_{g,\infty}(r)=o(T_g(r))$ がある．第 1 主要定理 $T_g(r)=m_{g,\infty}(r)+N_{g,\infty}(r)$ と量子化 Cohn-Vossen 不等式 $T_g(r)\geq e^{-1}\log\frac{1}{1-r}$ から（g と ∞ の交わりの観点から言うと）g は ∞ を最大限近似している．

（補題）任意の代数的極小曲面の虚周期は非自明である．このことから $e^H\in\mathcal{D}$ という方程式の解が $\mathbb{S}$ 上の平均をとった後では g が極をとる点に限ることが従う．

この補題から $\mathbb{S}$ 上の平均をとれば e^H は $\mathcal{D}$ を最大限近似することが従う．よって $N_{e^H,\mathcal{D}}(r)=o(T_g(r))$ である．組 $(e^H,\mathcal{D})$ は周期条件を暗号化したものだから，e^H は $\mathcal{D}$ を最大限近似することから $(e^H,\mathcal{D})$ に Nevanlinna 理論を適用すれば，周期条件から何らかの不変量を導けるはずである．これが周期条件を量子化するためのアイディアである．

正則曲線が因子を最大限近似しているとき何が起きるかを記述する定理が対数微分補題 (LLD) である．

（$\mathbb{D}$ 上の増大度が小さい有理型関数に対する effective な対数微分補題）$f:\mathbb{D}\to\mathbb{P}^1$ は正則写像で条件 $0<\kappa_f:=\min\left\{\kappa>0\,\middle|\,\int_0^1\exp(\kappa T_f(t)dt=\infty\right\}<\infty$ を満たすものと仮定する．このとき $r\to 1$ のとき漸近的に $\kappa_f T_f(r)=\log\frac{1}{1-r}$ であり，$m_{\frac{f'}{f},\infty}(r)\leq\kappa_f T_f(r)+o(T_f(r))$ が成り立つ．不変量 κ_g を使うと量子化 Cohn-Vossen 不等式は $\kappa_g\leq e$ と表される．

（定理）周期条件のもとで $0<\kappa_{e^H}<\infty$ である．すなわち $\exists C>0$ s.t. $C\log\frac{1}{1-r}<T_{e^H}(r)<C^{-1}\log\frac{1}{1-r}$ である．そして $r\to 1$ のとき漸近的に $\kappa_{e^H}T_{e^H}(r)=\log\frac{1}{1-r}$ である．したがって対数微分補題を周期条件を暗号化する組 $(e^H,\mathcal{D})$ に適用できる．

（証明のアイディア）放物型局所化原理の Nevanlinna 理論解釈と $0<\kappa_{e^H}<\infty$ の証明は次である：$\mathbb{D}(r)$ を覆う基本領域の最小集団が含む放物列の個数を数え上げるには，基本領域たちを先頭がユークリッド的に歪んでいない放物列に整列させて先頭のユークリッド直径で分類すればよい．ここで，数え上げの方法は以下のとおり．

1. ユークリッド的歪み強度 $n_\theta(\gg 1)$ を固定する（$\mathbb{D}(r)$ を被覆する基本領域の最小集合「コロナ」を捉える）．

2. $t<r$ に対し $\mathbb{D}(r)$ を覆う基本領域の最小集団が含む放物列でユークリッド直径 $O(1-t)$ の歪みのない基本領域を先頭とするものの個数は $O((1-t)^{-1})$ である．$O((1-t)^{-1})$ をいかなる測度 $d\mu(t)$ で s まで積分したら $O((1-s)^{-1})$ になるかを考える．答えは $d\mu(t)=\frac{dt}{1-t}$ である．

3. $\mathbb{D}(r)$ に関する何らかの数え上げを実行するには，各 $t<r$ に対し，問題の個数のうちユークリッド直径 $O(1-t)$ の歪んでいない基本領域を先頭にもつ放物列由来の個数を求め，その結果を測度 $\frac{dt}{1-t}$ に関して（たとえば $t=2^{-1}$ から）$t=1-(1-r)^a$ まで積分すればよい．

4. たとえば $\kappa_{e^H}<\infty$ の証明. $T_{e^H}(r)$ の Cartan-Nevanlinna 表示 $T_{e^H}(r)=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\log(1+|e^H|^2)\frac{d\theta}{2\pi}$ を放物列の寄与の和に分解し，周期条件のもとで数え上げ原理（放物列の先頭のユークリッド直径 $1-t$ ごとに放物列の CN 表示への寄与を評価して，測度 $d\mu(t)=\frac{dt}{1-t}$ で積分する）を適用する．

（$\pi_1(M)$ 作用の効果）e^H に適用される LLD は，微分を $\mathbb{D}$ の線型パラメータ z で行うか，M の punctured points のまわりの局所パラメータ ζ で行うかの 2 通りがあり，2 通りの結果が得られる．結果を述べるために次の 2 つのネヴァンリンナ理論的関数を導入する（h は $T\mathbb{P}^1$ 値と考えて ω_{FS} で接近を評価する）：$J_1(r):=m_{h,S_0}(r)-m^{\zeta}_{h,S_0}(r)$，$J_2(r):=m_{h,S_\infty}(r)-m^{\zeta}_{h,S_\infty}(r)$. 次の定理は，対数微分補題を $(e^H,\mathcal{D})$ に適用した結果，すなわち量子化された周期条件がどのようなものかを記述したものである：

（定理）e^H に LLD を適用して得られる評価式は $J_1(r)$ と $J_2(r)$ の言葉で $J_2(r)\leq(1-\kappa_g^{-1})\log\frac{1}{1-r}$ $(r\notin E)$ と $(8\kappa_g^{-1}-2)\log\frac{1}{1-r}\leq J_1(r)+2J_2(r)$ $(r\notin E)$ に翻訳される．

証明は e^H に LLD を適用して得られる 2 本の不等式を，放物型局所化原理のネヴァンリンナ理論解釈をフル活用して書き換える作業である．ガウス写像 $g : \mathbb{D} \to \mathbb{P}^1$ に古典的なネヴァンリンナ解析を適用して以上の結果を総動員すると次の定理を得る：

（定理）D を（Gauss 写像 g の除外集合を想定した）$\mathbb{P}^1$ の任意の因子とする．このとき方程式 $g(z) \in D$ の根の個数を Nevanlinna 理論的に数えると $m_{g,D}(r) + N_{g,\mathrm{Ram}}(r) \le T_{h,S_0-S_\infty}(r) + (4\kappa_g - 10)\,T_g(r)$ である．

Gauss-Bonnet の定理より右辺は $2T_g(r)+(4\kappa_g-10)T_g(r) = 4(\kappa_g-2)T_g(r)$ となる．量子化 Cohn-Vossen 不等式より $\kappa_g \le e$ だから結局右辺は $\le (2.88)\,T_g(r)$ となる．D としてガウス写像の除外値集合をとれば，$D_g \le 2$ を得る．

(B) 筆者がこのアイディアを思いついたのは 10 年以上前である．その動機は板東重稔氏と筆者が示した「Fano 多様体 Y の非特異因子 X は $c_1(Y) = \alpha[X]$ $(\alpha > 1)$ を満たし，Kähler-Einstein 計量を持つとする．このとき $Y \setminus X$ は完備 Ricci 平坦 Kähler 計量を持つ」という結果にある．

問 1: X が Kähler-Einstein 計量を持つという仮定をはずしたらこの結果はどうなるか？

問 2：もし X が K 安定ならどうか？

ここ数年の研究で問 1 は Monge-Ampère 方程式の非有界解の増大度評価の問題に帰着し，$Y \setminus X$ は完備 Ricci 平坦 Kähler 計量を持つことがわかる．

問 2 を解決するのが本研究の課題である．

数年続いている本研究の進み具合を述べる．

目標 1：偏極多様体 (Y, L) とその上の因子 X に対し，もし $c_1(L) = \alpha[X]$ $(\alpha > 1)$ ならば $Y \setminus X$ は scalar 平坦完備 Kähler 計量を許容することを証明する．

目標 2 : 偏極が反標準因子のときに X が K 安定ならば $Y \setminus X$ の Ricci 平坦完備 Kähler 計量の “留数” は X 上の Kähler-Einstein 計量であることを証明する．

目標 3：目標 2 を達成したら目標 1 の解析をもとにして偏極を一般化する．

偏極が反標準束のときは目標 1 は scalar 平坦を Ricci 平坦に強めた形で成り立つという途中結果を得た．解析的には Monge-Ampère 方程式の非有界解の増大度評価の方法を確立している．Kähler-Ricci flow に沿う Perelman の W-entropy のふるまいを解析するいおとにより Chen-Wang は Fano 多様体上の KRF が双有理同値な Kähler-Ricci soliton に収束すること，K 安定性のもとでは KE 計量に収束することを示した (2016)．W-entroppy の関数パートにスケールパラメータ ε を導入して W_ε-entropy を導入し $\varepsilon \to 0$ とすることによって与えられた Fano 多様体に双有理同値な（弱）KE 多様体を flow の極限空間として見つけられないか，という問題が今後の課題である．

偏極が一般の場合は現在研究は現在進行中である．例えば Y として L の射影的完備化をとる．$c_1(L)$ に属する X 上の cscK 計量の $Y \setminus X$ 類似として，$Y \setminus X$ の scalar 平坦完備 Kähler 計量を考える．こうして (X, L) の K 安定性が $Y \setminus X$ の scalar 平坦完備 Kähler 計量の無限遠挙動の言葉にうつしかえる．この観点をとれば X 上の Ricci 曲率の解析を任意の偏極の場合に拡張するという困難な課題に代わって $Y \setminus X$ 上の Monge-Ampère 方程式の解析が現れ，問題が単純化される．実際，X の偏極が反標準束の場合には $Y \setminus X$ の Ricci 平坦完備 Kähler 計量を導く Monge-Ampère 方程式の解析は本研究の準備段階でほぼ完成しているし，そこでの解析を X の偏極が任意の場合にどのように拡張したらいいか，以下のような戦略がある：Y^{n+1} を複素射影代数多様体とする．L を Y 上の豊富直線束とし，非特異因子 X^n が存在して $L|_X = N_{X/Y}$, $c_1(L) = \alpha[X]$ $(\mathbb{Q} \ni \alpha > 1)$ を満たし，条件 $c_1(Y)c_1(L)^n > 0$ が成り立つと仮定する．L に正曲率の Hermite 計量を入れて $\theta := c_1(L, \|\cdot\|)$ とおき，σ を $\mathcal{O}_Y(X)$ の正則切断で $X = (\sigma)_0$ となるものとする．このとき $\omega(0) := \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar\partial\|\sigma\|^{-2\frac{\alpha-1}{2(n+1)}} = \|\sigma\|^{-2\frac{\alpha-1}{n+1}}\left(\theta + \frac{\alpha-1}{n+1}\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\log\|\sigma\|^{-2}\wedge\bar\partial\log\|\sigma\|^{-2}\right)$ は $Y \setminus X$ 上の完備 Kähler 計量である．$\omega(\varepsilon) := (\|\sigma\|^2+\varepsilon)^{-\frac{\alpha-1}{n+1}}\left(\theta + \frac{\alpha-1}{n+1}\frac{\|\sigma\|^2}{\|\sigma\|^2+\varepsilon}\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\log\|\sigma\|^{-2}\wedge\bar\partial\log\|\sigma\|^{-2}\right)$ は，Kähler 性を保ったまま $\omega(0)$ の極を丸めたものである．$\{\omega(\varepsilon)\}_{\varepsilon>0}$ は Y 上の Kähler 計量の族で $\lim_{\varepsilon\to0}\omega(\varepsilon) = \omega(0)$, $[\omega(\varepsilon)] \in a_\varepsilon c_1(L)$ を満たすものである．特に $a_\varepsilon = O(\varepsilon^{-\frac{\alpha-1}{n+1}})$ である．以下，$\omega = \omega(\varepsilon)$ をパラメタ $\varepsilon > 0$ つきの Y の背景計量とする．Y 上の C^∞ 関数の族 $\{h_\varepsilon\}$ を，X から離れた場所 $\|\sigma\|^2 \ge \varepsilon$ では $h_\varepsilon = O(\varepsilon^{\frac{\alpha-1}{n+1}})$ かつ $dh_\varepsilon = 0$ を満たし，積分条件 $\int_Y h_\varepsilon\omega(\varepsilon)^{n+1} = a_\varepsilon^n c_1(Y)c_1(L)^n$ を満たすようにとる．Y 上の体積形式 Ω'_ε で $\|\sigma\|^2 \ge \varepsilon$ 上で $\mathrm{Ric}(\Omega'_\varepsilon) = 0$ となるものが存在することを構成的に証明できる．$L = K_X^{-1} > 0$ ならこの主張は明らかであるが，これは仮定 $c_1(Y)c_1(L)^n > 0$ を満たす豊富直線束 L の場合も成り立つことを主張する．仮定は $\mathrm{Ric}(\Omega'_\varepsilon)$ が豊富因子 X と共通部分を持たない領域だけへの局所化を禁じ，この命題は X の近傍に局所化し得ることを主張している．したがって $h_\varepsilon = \mathrm{tr}_\omega(\mathrm{Ric}(\Omega'_\varepsilon)) + (\mathrm{const})$ によって上記の $\{h_\varepsilon\}$ を定数部分を正規化した形で構成できる．以上の準備のもと，固定された $\varepsilon > 0$ に対し $\omega = \omega(\varepsilon)$ を背景計量とし，$\omega_u = \omega + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar\partial u$ をその変形として次の偏微分方程式系 $(*)$：$\triangle_{\omega_u} f_u + \mathrm{tr}_{\omega_u}(\mathrm{Ric}(\omega)) = h_\varepsilon$ (f_u を定義する方程式), $\int_Y e^{-f_u}\omega^{n+1} = \int_Y \omega^{n+1}$ (f_u の正規化条件), $\Omega(\omega_u) := e^{-f_u}\omega^{n+1}$ (体積形式 $\Omega(\omega_u)$ の定義), $\mathrm{Ric}(\omega_u) = \mathrm{Ric}(\Omega(\omega_u))$ (ω_u に対する prescribed Ricci form equation) を考える．第 3 方程式は Monge-Ampère 方程式 $\frac{\det(g_{i\bar j}+u_{i\bar j})}{\det(g_{i\bar j})} = e^{-f_u}$ と同値である．固定された $\varepsilon > 0$ が十分小さいとき一様な ε 依存性を持つことが示されれば，極限 $\lim_{\varepsilon\to0}\lim_{t\to\infty}\omega_t$ が $Y \setminus X$ 上の完備 scalar-flat Kähler 計量になる．この解析的問題は，Y が Fano 多様体，X が非特異因子で $c_1(Y) = \alpha[X]$ $(\mathbb{Q} \ni \alpha > 1)$ のときは解けて，$Y \setminus X$ は完備 Ricci-flat Kähler 計量を許容することが導かれる．このとき Y は Fano 多様体である．もし X が Kähler-Einstein 計量を許容すれば，それを使って良い境界条件を設定できて $\omega(0) + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar\partial u$ が完備 Ricci-flat Kähler 計量で u はある種の減衰評価を持つことが示される．一方，X が Kähler-Einstein 計量を許容しないと，どんな境界条件をとっても上記の連立方程式の解の最大値は $\varepsilon \to 0$ のとき発散することが示される．したがって ε 依存性が一様な先験的評価は例えば $\|\frac{u_\varepsilon}{1+\mathrm{dist}^2_{\omega(\varepsilon)}(\cdot,o)}\|_\infty \le C$ (o は $Y \setminus X$ の固定点) のような “増大度評価” でなければならない．この研究の途中段階でこのような増大度評価が $L = K_X^{-1}$ のときには可能であること

を示した．その議論は“C^2 評価を仮定 ⇒ 仮定された C^2 評価の言葉で増大度評価を示す ⇒ 前段階の増大度評価の言葉で表される先験的 C^2 評価 ⇒ 先験的 C^2 評価を示す ⇒ 先験的増大度評価を得る”という，増大度評価と C^2 評価の間に成り立つ先験的関係式をまず求めて，連立方程式を解くようにして先験的増大度および C^2 評価を得る，というものである．$\mathrm{Ric}(\omega)$ と $\mathrm{Ric}(\Omega'_\varepsilon)$ が $Y\setminus\Omega'_\varepsilon$ において同様の集中現象を満たすことから，$f_u=f_{u,1}+f_{u,2}$, もし十分小さい $\varepsilon>0$ に対し Kähler 計量族 $\{\omega_u\}$ と $\{\omega(\varepsilon)\}$ が一様に同値なら $\{f_{u,1}\}$ は一様に有界，十分小さい $\varepsilon>0$ に対し $\mathrm{Supp}(\triangle_{\omega_u}f_{u,2})\subset Y\setminus\Omega_\varepsilon$ という条件を満たす分解が存在する．ただし $\Omega_\varepsilon:=\{\|\sigma\|^2<\varepsilon\}$ である．この分解は，偏微分方程式系または同値な発展方程式系の先験的評価の出発点になる観察である．X の偏極が反標準束でないときの scsK 計量はそのままでは X 上の Monge-Ampère 方程式に帰着できないが，Y 上に議論を持ち上げれば，偏極を反標準束から豊富直線束に一般化しても途中結果の議論は拡張できる可能性が大きい．しかも，Monge-Ampère 方程式の解析そのものはほとんどの場面で K_X^{-1} でも一般の豊富直線束 L でも共通と思われるので，その戦略を予想の連鎖の形で述べる：

戦略 1： 正規化条件 $\int_Y e^{-f_u}\omega^{n+1}=\int_Y\omega^{n+1}$ と初期条件 $\omega_u(0,\cdot)=\omega$ のもとで，Y^{n+1} 上の Monge-Ampère 型発展方程式と Poisson 方程式から成る偏微分方程式系 $\frac{\partial u}{\partial t}=\log\frac{\det(g_{i\bar{j}}+u_{i\bar{j}})}{\det(g_{i\bar{j}})}+f_u$, $\triangle_{\omega_u}f_u+_{\omega_u}(\mathrm{Ric}(\omega))=h_\varepsilon$ を導入する．ただし $\omega=\omega(\varepsilon)=\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}g_{i\bar{j}}dz^i\wedge d\bar{z}^j$ は背景計量である．

戦略 2 : 次の命題を証明する：“関数 $h_\varepsilon-_{\omega_u}(\mathrm{Ric}(\omega))$ の L^n 評価のみによる量による $\|f_u\|_\infty$ の $\forall\varepsilon>0$ (small) と $\forall t>0$ に関して一様な評価が存在する”．

戦略 3 : 次の命題を証明する：“関数 $h_\varepsilon-\mathrm{tr}_{\omega_u}(\mathrm{Ric}(\omega))$ の L^n 評価のみによる量による $\|\dot{f}_u\|_\infty$ の $\forall\varepsilon>0$ (small) と $\forall t>0$ に関して一様な評価が存在する．ただし $\dot{f}_u$ は $\frac{\partial f_u}{\partial t}$ のことである”．

戦略 4： 次の命題を証明する：“上記の連立発展方程式に対し $\forall t\in[0,+\infty)$ において解 (u,f), $u=u_t(\cdot)$, $f=f_t(\cdot)$ が存在する”．「$Y\setminus X$ に完備 Ricci-flat Kähler 計量が存在する」という途中結果は，$Y\setminus X$ における完備 Ricci-flat Kähler 計量の存在問題という特別な場合では，X における Kähler-Einstein 計量の問題には存在した障害（二木不変量や K 安定性などの障害）は $\varepsilon>0$ でパラメタ付けされた Kähler 計量族 $\{\lim_{t\to\infty}\omega_u\}$ が $Y\setminus X$ の完備 Ricci-flat Kähler 計量に収束するときの“無限遠での挙動に姿を変えて存在している”と解釈できることを意味する．上記の戦略に先立って行った議論は，同様のことが，L_X が X 上の一般の豊富直線束で (Y,L) が (X,L_X) を拡張する 1 次元高い偏極多様体で $c_1(L)=\alpha[X]$ $(\alpha>1)$ かつ $c_1(Y)c_1(X)^n>0$ が成り立つ場合にも言えることを示唆している．上記の戦略 1,2,3,4 はこれを確認する方向での計画である．Donaldson-Tian-Yau 予想は，X が cscK 計量を許容することと X の K 安定性が同値であることを主張する．したがって，以上述べてきたアイディアは次に様にまとめられる：本研究は，X^n の“非 K 安定性”を，小さな $\varepsilon>0$ でパラメタづけされた Y^{n+1} 上の Monge-Ampère 方程式の解の族の X における発散の様子から読み取ろうという試みである．

戦略 5． 定 scalar 曲率 Kähler 計量の方程式は Monge-Ampere 方程式ではないが，Monge-Ampere energy functional の臨界点であることことから Monge-Ampere 方程式への帰着が何らかの意味で可能なのではないかと思われる．一般の偏極における Kähler 計量の空間 $\mathcal{H}$ の力学系で modified Kähler-Ricci flow $\frac{\partial\omega}{\partial t}=-\mathrm{Ric}(\omega)+\mathbb{H}\mathrm{Ric}(\omega)$ を離散化するものを次のように導入する：$\{\mathrm{Ric}(\omega)+dd^cu\}\wedge\omega^{n-1}$ が ω^n の scalar 倍となる $u\in C^\infty_{\mathbb{R}}(X)$ をとり，未知関数 ϕ に対する Monge-Ampere 方程式 $\mathrm{Ric}(\omega_\phi)=\mathrm{Ric}(\omega)+dd^cu$ を解く．すると $\mathcal{H}$ の力学系 $\omega\mapsto R^L\omega:=\omega_\phi$ が定まる．この状況で次の問題を考える．

問題 1:K-energy が反標準偏極の場合のような単調性も持つか？

問題 2: iteration $(R^L)^j\omega$ において $j\to\infty$ とすると（問題の偏極が定 scalar 曲率 Kähler 計量を許容するとき）定 scalar 曲率 Kähler 計量に収束するか？

目標は反標準偏極の場合の Berman の thermodynamical formalism を偏極一般に拡張することである．この問題に対し次を観察した．半標準偏極の場合は K-energy と Ding 汎関数の関係から Ricci iteration の軌道上で K-energy が単調減少であることが導かれることが K-energy の単調性の証明の鍵であった．偏極一般ではそもそも Ding 汎関数というべきものが存在していないという困難がある．しかし反標準偏極の場合に K-energy と相対エントロピーを関係づける公式に注目することによって，Ding 汎関数の偏極一般類似を次のように導入できることがわかった．まず反標準偏極では自然に定義される相対エントロピーを，R^L を使うことにより定義される体積要素 $V^{-1}(R^L\omega)^n$ に関する $V^{-1}\omega^n$ の相対エントロピー $H_{V^{-1}(R^L\omega)^n}(V^{-1}\omega^n)$ として定義することにより偏極一般の場合に拡張する．反標準偏極で成り立つ公式 $\mathrm{Mab}(\omega)=\mathrm{Ding}(\omega)+H_{e^{-\phi_\omega}\mu_0/\int_X e^{-\phi_\omega}\mu_0}(V^{-1}\omega^n)$ を偏極一般の場合に形式的に拡張した式 $\mathrm{Mab}(\omega)=\mathrm{Ding}^L(\omega)+H_{V^{-1}(R^L\omega)^n}(V^{-1}\omega^n)$ でもって偏極 L に関する Ding 汎関数というべきもの Ding^L を定義するのである．K-energy だけは偏極一般で意味を持つが，Monge-Ampère energy や Berndtsson の L 汎関数も偏極一般の設定で定式化しなおす必要がある．これらの汎関数を反標準束の場合と同様に微分公式の形で定義したい．Ding 汎関数の一般化と異なり，これらの偏極一般化バージョンは形式的には候補が自然に見つかる．反標準偏極の場合 K-energy が Ricci iteration 上単調減少であることの背景には種々の汎関数の間の Legendre duality が在って，Legendre duality と Monge-Ampère energy E の凸性を組み合わせることが単調性の証明の鍵であった (Berman による方法)．Legendre duality を偏極一般に拡張するときに問題になるのは，偏極一般では Kähler 形式の変分 $\omega_0\mapsto\omega_0+dd^c\phi$ の速度ベクトル $\dot{\phi}$ に対し，偏微分方程式 $\triangle\dot{\psi}-\langle dd^c\dot{\phi},\mathbb{H}_\omega\mathrm{Ric}_\omega\rangle_\omega=0$ によって定まる $\dot{\psi}$ が現れて，たとえば偏極一般のもとで Monge-Ampère energy E^L を微分公式で定義するときに許される Kähler 形式の変形の方向は $\triangle^{-1}_{\omega_0}(dd^c\dot{\phi},\mathbb{H}_{\omega_0}\mathrm{Ric}_{\omega_0}\rangle$ の形のものに限られるという現象である（反標準偏極のときは $\dot{\psi}=\dot{\phi}$ となって，新しいものは現れない）．この変形方向の制限のもとでの偏極一般 Monge-Ampère energy E^L の凸性を証明しなければならない．このように運動が制限を受けることことが，反標準偏極のときの Monge-Ampeère energy E の凸性の証明方法が偏極一般 E^L の場合にも働くような運動方向だけを選択

するプロセスに一致しているのだろう，と予想している．

4．研究の成果． (A) 本研究の最大の成果は 2 点ある．1 つは放物型局所化原理の Nevanlinna 理論解釈 $N_{g,\infty}(r) = o(T_g(r))$ である．2 つめは周期条件の特徴づけ $0 < \exists C_1 < \frac{T_{e^H}(r)}{\log \frac{1}{1-r}} < \exists C_2$ である．1 つめは古典 Nevanlinna 理論では見つからなかった新しい現象の発見である．放物型局所化原理は自由フックス群のワードの長さの時間発展を S^1 上の力学系の言葉で表現したものと解釈できる．これがこの問題だけでなく，Diophantus 幾何への有効なアプローチになり得ると予想している．たとえば放物型局所化原理と Roth, Schmidt の定理の関係が自然に見えるという点が今後の研究の発展の契機になるだろう．また，2 つめは，周期条件を何らかの別の言葉で単純な形で特徴づけた結果がこれまで皆無だった状況においては，最初のものであって，将来，このテーマを先に進めるにあたって強力な方法論になっていくと考えられる．

(B) 次に述べる新しい着想が生まれた．Bando-Kobayashi の結果は D の KE 条件を $X-D$ の KRF 条件に拡張したものと解釈できる．そこで D の KE 条件を正規化 KRF (normalized Kahler-Ricci flow) に一般化する（KE = static normalized KRF だから）．これを $X-D$ の非正規化 KRF に拡張するという着想が生まれた．その意義は，これが可能ならば、一種の不動点定理が成り立つことを意味するから，いつものように反復法で証明できるだろうと予想されることである．一方，研究途中の preprint[3] により D が KE を持たない場合でも RFK metric の Kahler potential が満たす Monge-ampere eqn の遠方で距離の 2 乗オーダーで発散する非有界解を考えることにより $X-D$ に完備 RFK metric が入ることがわかる．これから逆に，D と双有理なある特異 Fano variety に特異 KE metric があることになると予想される（拡張の逆操作）．もしこれらがすべて正しければ，KRF の時間大域解とその極限を一種の continuity method で構成できるであろうことを示唆している．言い替えれば destabilized test configuration が構成できるだろうことを示唆している．一般偏極で cscK metric を探す問題にも，このアイディアは有効である．(X, D) として偏極射影代数多様体 $(X, [D])$ を考える．D が KE という条件のかわりに D が cscK という条件を考え，$X-D$ が RFK のかわりに $X-D$ が SFK(scalar-flat Kahler metric) という条件を考える．さらに cscK を一般化した flow として $\dot{\omega} = -\mathrm{Ric} + \mathbb{H}(\mathrm{Ric})$（ここで，$H$ は harmonic part をとる操作）を考える．これの時間静的解が cscK である．上と同様に反復法でこれを $X-D$ の何らかの flow に拡張する．この flow の時間静的解が scalar-flat になっていなければならない．これができたと仮定すると，D が cscK を持たない場合にも $X-D$ が完備 SFK で漸近錐的なものを許容するかどうかが，問題になってくる．この問題が解ければ，上で導入した D 上の時間発展方程式の $X-D$ への拡張を介在させた continyuty method による時間大域解とその極限の存在を示すための最後のステップになっているはずである．このように，本研究テーマに新たな方向性を提起できたことが，本研究で得られた成果である．

5．主な発表論文等：

研究の途中経過は**未公表論文 (5 件，著者から入手可)**：

[1] R. Kobayashi and R. Miyaoka, “Nevanlinna-Galois theory for algebraic and pseudo-algebraic minimal surfaces – value distribution of the Gauss map – ”, preprint, 2018.

[2] R. Kobayashi, “Asymptotically conical Ricci-flat Kähler metrics on affine algebraic manifolds”, preprint, 2015.

[3] R. Kobayashi, “Asymptotically conical Ricci-flat Kähler metrics and compactification of complex homology cells”, preprint, 2012.

[4] R. Kobayashi, “On the fundamental group of an algebraic variety with ample canonical bundle which admits a special canonical divisor”, preprint, 2012.

[5] R. Kobayashi, “Holomorphic curves in compact complex parallelizable manifold $\Gamma\backslash SL(2,\mathbb{C})$ and CMC-1 surfaces in compact hyperbolic 3-manifolds”, preprint, 2018.

出版予定図書 (1 **冊**)：

[1] 小林亮一，“Ricci flow と複素幾何”，朝倉書店，幾何学百科，幾何解析，第 5 章．2018 年出版予定．

国際会議の発表 (4 **件**)：

[1] R. Kobayashi, “Semi-classical analysis arising from minimal surface theory”, The 23rd Symposium on Complex Geometry, Kanazawa University, 06/11/2017-10/11/2017.

[2] R. Kobayashi, “A Quantization of Osserman’s theory of algebraic minimal surfaces”, School and conference on geometry and quantization (GEOQUANT) at Aarhus University, 31/07/2017-11/08/2017.

[3] R. Kobayashi, “Quantization of Osserman’s theory of algebraic minimal surfaces”, SCV Hayama Symposium 2017, 湘南国際村センター 15/07/2017-18/07/2017.

[4] R. Kobayashi, “Holomorphic curves in compact complex parallelizable manifold $\Gamma\backslash SL(2,\mathbb{C})$”, Analytic and Algebraic Geometry 2018, ICTS Bangalore, 19/03/2018-24/03/2018.

それ以外の発表 (3 **件**)：

[1] 小林亮一，“代数的極小曲面のオッサーマン理論の量子化”，複素幾何と幾何解析, 明治大学, 2017 年 3 月 13 日-15 日．

[2] 小林亮一，“代数的極小曲面のオッサーマン理論を量子化するにあたって現れる諸問題”, 北九州幾何学研究集会 2017, 九州工業大，2017 年 7 月 8-9 日，

[3] 小林亮一，“Holomorphic curves in compact complex parallelizable manifold $\Gamma\backslash SL(2,\mathbb{C})$”，「リーマン面，不連続群」研究集会，名古屋大学，2018 年 2 月 10-12 日．

6．研究組織：

研究代表者

小林亮一 (Kobayashi Ryoichi)

名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・教授

研究者番号 20162034