

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 13 日現在

機関番号：17102

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2014～2016

課題番号：26610016

研究課題名(和文)非正則非等方的平均曲率一定超曲面及び超曲面群の研究の新展開

研究課題名(英文)Study on hypersurfaces of constant anisotropic mean curvature with singularities

研究代表者

小磯 深幸 (KOISO, Miyuki)

九州大学・マス・フォア・インダストリ研究所・教授

研究者番号：10178189

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,900,000円

研究成果の概要(和文)：ユークリッド空間内の超曲面に対する非等方的エネルギーの変分問題を研究した。囲む体積を変えない変分に対する非等方的エネルギーの平衡超曲面は、単結晶の数値モデルを与える。平衡超曲面が満たすべき必要十分条件を求め、特に平面閉曲線については非等方的エネルギーの極小解の一意性を証明した。また、多結晶の数値モデルの変分法的特徴付け、ローレンツ空間内の平均曲率一定曲面の曲率と特異点、離散曲線の曲率についての研究成果を得た。

研究成果の概要(英文)：We studied a mathematical model of small crystals. They are equilibrium surfaces of an anisotropic surface energy which is the integral of the surface tension over the surface. The surface tension depends on the direction of each point of the surface. We derived the condition for a surface to be an equilibrium surface, and we proved the uniqueness of the local energy minimizer for closed plane curves. We also studied a mathematical model of small double crystals, surfaces with constant mean curvature in Lorenz spaces, and curvatures of discrete space curves.

研究分野：微分幾何学

キーワード：非等方的エネルギー ウルフ図形 平均曲率一定曲面 変分問題 ローレンツ・ミンコフスキー空間
ローレンツ多様体 離散曲線 離散振率

1. 研究開始当初の背景

(1) 単結晶の基本的な数理モデルとして知られるウルフ図形と呼ばれる凸図形は、同じ体積を囲む閉曲面の中での非等方的エネルギー (詳細は後述) の最小解である。より一般に、結晶やある種の液晶のように異方性を持つ物質の形状は、その表面の各点の向きに依存して決まるエネルギーが、同じ体積を囲む図形の中で極小値をとる形と考えられる。このような表面の数学的抽象化は、「囲む体積を変えない」変分に対する非等方的エネルギーの平衡曲面である。ここで、曲面の非等方的エネルギーとは、曲面の各点の向きに依存して決まる非等方的表面エネルギー密度関数の曲面全体での和(積分)である。このような平衡曲面は、非等方的表面エネルギー密度関数が「凸性条件」を満たす場合は滑らかな曲面となり幾何学的あるいは解析的な研究が進んでいるが、「凸性条件」を満たさない場合は平衡曲面として特異点を有するものが現れ微分幾何的な研究はまだほとんど進展していない。たとえば、非等方的表面エネルギー密度関数が「凸性条件」を満たす場合は、エネルギー極小の閉平衡曲面はウルフ図形に限り (B. Palmer, 1990)、種数 0 の閉平衡曲面もウルフ図形に限る (M. Koiso-B. Palmer, 2010)。エネルギー密度関数が「凸性条件」を満たさない場合はウルフ図形や平衡曲面は滑らかとは限らず、上述のような閉曲面に対する一意性が成立するか否かは不明である。このような平衡曲面については、「区分的に滑らか」あるいは「リプシッツ連続」程度の超曲面のクラスで考えるのが自然であるが、曲率の概念やエネルギー極小性の判定法は従来のものは使えず、新しい方法を構築する必要がある。

(2) 上述のウルフ図形は単結晶の数理モデルであるが、多結晶の数理モデルについての幾何学的研究も理論・応用の両観点から重要

である。最も簡単な問題は、3次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^3 内で与えられた体積を持つ2つの連結領域が接している時、それらの境界の非等方的エネルギーの総和を最小にする形状(ダブルクリスタルと呼ぶ)を決定するという問題である。エネルギーが等方の場合には2つのシャボン玉が接している時の形状の数理モデルを与えており、互いに120度の角を成す3つの球帽(球面の部分集合)の和集合がエネルギー最小解である

(Hutchings-Morgan-Ritore-Ros, 2002)。エネルギーが非等方の場合については、Morgan他(1998)による平面図形についての研究があるだけであり、新しい方法を生み出す必要がある。

2. 研究の目的

(1) Fが凸性条件を満たさない場合に、「区分的に滑らか」または「リプシッツ連続」程度の曲面のクラスにおいて、同じ体積を囲む閉曲面の中での非等方的エネルギーFの臨界点を決定する。たとえば、「エネルギー極小解はウルフ図形に限る (Palmer 1990の一般化)」、「種数0の臨界点はウルフ図形に限る (Koiso-Palmer 2010の一般化)」を証明する。

(2) 与えられた体積を持つ2つの連結領域が接している時、それらの境界の非等方的エネルギーの総和を最小にする形状(ダブルクリスタル)を決定する。

3. 研究の方法

(1) 上述(1)の研究課題については、滑らかでない点の近傍での曲面の変分を曲面の自由境界問題の解とみなすことにより、変分法を構築する。また、ローレンツ・ミンコフスキー空間内の平均曲率一定曲面(囲む体積を変えない変分にたいする面積の平衡曲面)が、ユークリッド空間内の非等方的エネルギーの平衡曲面ともみなせることに鑑み、ローレンツ空間内の平均曲率一定曲面の特異点及

び平均曲率の振る舞いを研究する。

(2) 上述(2)の研究課題については、二つのクリスタルが接する部分での変分を曲面の自由境界問題の解とみなすことにより、変分法を展開する。さらに、物理現象に動機を得た自然なエネルギー密度関数のクラス（たとえば、対称性を仮定する）に対する解を解析する。その際、必要ならば計算機による数値計算を援用する。

(3) 「区分的に滑らか」などのクラスでの曲線・曲面・超曲面やその曲率の概念を構築するための手がかりとして、3次元ユークリッド空間内の離散曲線に対する自然な曲率の概念を求める。

4. 研究成果

(1) ユークリッド空間内の非等方的エネルギーの平衡曲面について、以下の研究成果を得た。平衡曲面（より一般に、一般次元ユークリッド空間内の平衡超曲面）が満たすべき必要十分条件を求めた。これは、滑らかな点における曲率と、滑らかでない点における特異性の性質を用いて表現される。さらに、非等方的表面エネルギー密度関数が二階連続的微分可能である場合に、2次元ユークリッド空間内の曲線について、非等方的エネルギーの極小値を与える平衡閉曲線がウルフ図形に限ることを証明した。

(2) ローレンツ空間内の平均曲率一定曲面について、以下の研究成果を得た。

① ローレンツ・ミンコフスキー空間内の空間的非零平均曲率一定曲面（以下、CMC曲面と記す）は折り目特異点を持たないこと、錐状特異点を持つ空間的非零 CMC 回転面の共役 CMC 曲面は(2;5)-カスプ状特異点を持つことを証明した（本田淳史氏、佐治健太郎氏との共同研究）。これらの結果は、非零 CMC 曲面の特異点が平均曲率零曲面の特異点と本質

的に異なる性質を持つことを意味する重要なものである。

② 3次元実解析的ローレンツ多様体内の空間的曲面で平均曲率有界なものが実解析的に時間的曲面に延長されるならば、平均曲率関数は光的部分で零になる（収束する）ことを証明した（本田淳史氏他との共同研究）。この結果もまた、非零 CMC 曲面と平均曲率零曲面の特異点の本質的に異なる性質を与える重要なものである。

(3) 新川恵理子氏との共同研究により、ダブルクリスタルに関する以下の研究成果を得た。(n+1)次元ユークリッド空間において、区分的に滑らかな境界で囲まれ与えられた(n+1)次元体積を持つコンパクトで連結な二つの(n+1)次元多様体が接している時、それらの境界の非等方的エネルギーの総和を極小にする形状を決定するという変分問題を考える。本研究の研究課題は、より一般に、このような非等方的エネルギーの総和の臨界点（ダブルクリスタルと呼ぶ）である。本研究課題は、非等方性を持つ二つの結晶が接している場合の数理モデルを与えると考えられる。本研究では、主として変分法を用いることにより、エネルギーの臨界点が満たすべき幾何学的条件、及び、臨界点がエネルギー極小であるための解析的条件を求め、特にn=1でエネルギー密度関数がある種の対称性を持つ例については臨界点の対称性及びエネルギー極小であるか否かを解析した。なお、ダブルクリスタルについての変分法的な先行研究は皆無であり、本研究は先駆的なものである。

(4) 阿部真之氏との共同研究により、3次元ユークリッド空間内の曲線の振率について、以下の研究成果を得た。

① 離散曲線に対し、振率（離散振率と呼ぶ）を定義した。

② 滑らかな曲線を離散曲線で近似する時, 離散振率の2乗の積分がもとの滑らかな曲線の振率の2乗をどの程度近似するかということを表す評価式を得た.

5. 主な発表論文等

[雑誌論文] (計 18 件)

[1] A. Honda, M. Koiso, M. Kokubu, M. Umehara, and K. Yamada, Mixed type surfaces with bounded mean curvatures in 3-dimensional space-times, *Differential Geometry and its Applications* 52 (2017), 64-77 (accepted for publication on March 22, 2017. published online on March 31, 2017). (査読有) DOI information: 10.1016/j.difgeo.2017.03.009 (査読有)

[2] Miyuki Koiso, Bennett Palmer, and Paolo Piccione, Stability and bifurcation for surfaces with constant mean curvature, to appear in *Journal of the Mathematical Society of Japan* (accepted for publication on March 8, 2016). (査読有)

[3] Atsufumi Honda, Miyuki Koiso, and Kentaro Saji, Fold singularities on spacelike CMC surfaces in Lorentz-Minkowski space, to appear in *Hokkaido Mathematical Journal* (Accepted for publication on January 21, 2016). (査読有)

[4] Jaigyoung Choe and Miyuki Koiso, Stable capillary hypersurfaces in a wedge, *Pacific Journal of Mathematics* 280 (2016), 1-15. (査読有)

[5] L. Ambrosio and S. Honda, Local spectral convergence in $RCD^{*}(K, N)$ spaces, arXiv:1703.04939, to appear in

Nonlinear Analysis (23 pages). (査読有)

[6] A. Futaki, S. Honda and S. Saito, Fano Ricci limit spaces and spectral convergence, arXiv:1509.03862, to appear in *Asian J. Math.* (52 pages). (査読有)

[7] A. Honda, Duality of singularities for spacelike CMC surfaces, to appear in *Kobe Journal of Mathematics*. (査読有)

[8] A. Honda, Isometric immersions with singularities between space forms of the same positive curvature, to appear in *Journal of Geometric Analysis*. DOI: 10.1007/s12220-017-9765-8 (査読有)

[9] U. Hertrich-Jeromin and A. Honda, Minimal Darboux transformations, *Beitr. Algebra. Geom.* 58 (2017), 81--91. DOI: 10.1007/s13366-016-0301-y (査読有)

[10] A. Honda, Weakly complete wave fronts with one principal curvature constant, *Kyushu J. Math.* 70 (2016), 217--226. DOI: 10.2206/kyushujm.70.217 (査読有)

[11] A. Honda, On associate families of spacelike Delaunay surfaces, *Real and Complex Singularities, Contemporary Mathematics*, vol. 675, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2016, pp. 103--120. DOI: 10.1090/conm/675 (査読有)

[12] A. Honda and S. Izumiya, The lightlike geometry of marginally trapped surfaces in Minkowski space-time, *J. Geom.* 106 (2015), 185--210. DOI: 10.1007/s00022-015-0266-2 (査読有)

[13] M. Hasegawa, A. Honda, K. Naokawa, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, Intrinsic properties of surfaces with singularities, *Internat. J. Math.* 26 (2015), 1540008, 34pages. DOI: 10.1142/S0129167X1540008X (査読有)

[14] Miyuki Koiso, Bennett Palmer, and Paolo Piccione, Bifurcation and symmetry breaking of nodoids with fixed boundary, *Advances in Calculus of Variations* 8 (2015), 337-370. (査読有)

[15] S. Honda, Ricci curvature and L_p -convergence. *J. Reine Angew. Math.* 705 (2015), 85-154. DOI: <https://doi.org/10.1515/crelle-2013-0061> (査読有)

[16] S. Honda, Harmonic functions on asymptotic cones with Euclidean volume growth. *J. Math. Soc. Japan* 67 (2015), 69-126. doi: 10.2969/jmsj/06710069 (査読有)

[17] S. Honda, A weakly second-order differential structure on rectifiable metric measure spaces. *Geom. Topol.* 18 (2014), 633-668. DOI: 10.2140/gt.2014.18.633 (査読有)

[18] M. Hasegawa, A. Honda, K. Naokawa, M. Umehara and K. Yamada, Intrinsic invariants of cross caps, *Selecta Math.* (N.S.) 20 (2014), 769-785. DOI: 10.1007/s00029-013-0134-6 (査読有)

[学会発表] (計 58 件)

[1] Miyuki Koiso, Stability and bifurcation for surfaces with constant mean curvature, Workshop “Differential

Geometry, Lie Theory and Low-Dimensional Topology”, 19-21 December, 2016, La Trobe University, Australia, 講演日 : 19 December, 2016.

[2] Miyuki Koiso, Stability and bifurcation for surfaces with constant mean curvature, Workshop on “Geometric Inequalities on Riemannian Manifolds”, November 23(Wed)-26(Sat), 2016, Haeundae beach, Busan, Korea, 講演日 : November 24 (Thu), 2016.

[3] Miyuki Koiso, Stability and bifurcation for surfaces with constant mean curvature, Twelfth Taiwan Geometry Symposium, National Tsing Hua University, May 14, 2016.

[4] Miyuki Koiso, Local structure of the space of all triply periodic minimal surfaces in \mathbb{R}^3 , Geometric aspects on capillary problems and related topics, Granada, Spain, December 14-17, 2015, 講演日 : December 16, 2015.

[5] Miyuki Koiso, Stable capillary hypersurfaces in a wedge and uniqueness of the minimizer, Conference “Asymptotic Problems: Elliptic and Parabolic Issues”, June 1-5, 2015, Vilnius, Lithuania. 講演日 : June 2, 2015.

[図書] (計 1 件)

[1] A Mathematical Approach to Research Problems of Science and Technology - Theoretical Basis and Developments in Mathematical Modeling (Ed. R. Nishii, S. Ei, M. Koiso, 他 4 名), (執筆部分 : Miyuki Koiso, Stability analysis for variational problems for surfaces with constraint,

pp. 81–87 査読有), Springer, July, 2014.

総ページ数 : 507.

[その他]

ホームページ :
http://www.imi.kyushu-u.ac.jp/academic_staffs/view/86

6. 研究組織

(1) 研究代表者

小磯 深幸 (KOISO, Miyuki)

九州大学・マス・フォア・インダストリ研究所・教授

研究者番号 : 10178189

(2) 研究分担者

本多 正平 (HONDA, Shouhei)

東北大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号 : 60574738

本田 淳史 (HONDA, Atsufumi)

都城工業高等専門学校・一般科目理科・講師

研究者番号 : 90708611