

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 2 日現在

機関番号：12611

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2014～2015

課題番号：26610020

研究課題名(和文)ディラック方程式の経路積分

研究課題名(英文)Path integrals for Dirac equations

研究代表者

古谷 希世子(FURUYA, Kiyoko)

お茶の水女子大学・基幹研究院・講師

研究者番号：80189208

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,700,000円

研究成果の概要(和文)：ファインマンの経路積分は直感的な定義により物理の世界では市民権を得ているが、数学の立場から見ると厳密な定義が与えられていない。積分を定義する為の一次元の測度が存在しないためである。

空間を激しく振動していることを考慮して無限次元空間(作用素空間)での『ベクトル測度』を定義する事によりファインマン-タイプの経路積分を定義した。空間次元2以上のディラック方程式の解は1次元の測度で表示できないことが示されているが、これを数学の立場から厳密に定義づけられたファインマンの経路積分により積分表示をするアイデアを示した。

研究成果の概要(英文)：The idea of Feynman's integral is a topic of great interest in mathematics and physics. But rigorous mathematical treatment of this integral is not enough. We defined a kind of operator-valued integration and define the path integrals.

Dirac equation is the basic equation of relativistic quantum mechanics to the fermions. For the case of space-dimension = 1, Ichinose proved the path integral for Dirac equations are represented by a scalar measure. For the case of radial Dirac equation Ichinose constructed a countably additive path space measure. But in general, for the case of space-dimension > 1, Feynman path integrals for Dirac equations are not represented by (scalar-valued) measures. We showed that the path integral for Dirac equations are represented by our vector-valued measure.

研究分野：数物系科学

キーワード：発展方程式 経路積分 ディラック方程式 ベクトル値測度 半群

## 1. 研究開始当初の背景

一瀬孝は1980年代に空間1次元のディラック方程式に対して経路の空間上の測度を構成した。空間次元  $d > 1$  の時は電磁場がないときのディラック方程式の初期値問題が  $L^\infty$  適切でないので一瀬の方法は適用出来ない。一般に定数係数対称双曲方程式系が  $L^\infty$  適切であるための必要十分条件は、係数行列が可換であることであるが、ディラック行列は反可換であるが可換ではないからである。2005年には、空間3次元の極座標ディラック方程式(本質的に1次元に帰着出来る)に対して、経路の空間上の可算加法的測度を構成し、そのグリーン関数の数学的厳密な経路積分表示を確立した。しかし本質的に3次元の場合は数学的には他の研究者も含め、何も得られていないようである。

ところが、電子のようなスピン1/2の粒子は、粒子-反粒子のそれぞれにスピンのアップ/ダウンの自由度があるため、全部で4つの自由度があると考えられる。従って**ディラック行列は最低  $4 \times 4$  でなければならない**。電磁相互作用などを通じて、これらの自由度が(対生成/対消滅やカイラリティの反転などのように)相互に関係を持つため、4つの成分を持つスピノル  $\psi$  として統一的に扱わなければならない。ディラック方程式の係数に現れる行列は、各成分の関わり合いを表すのに必要なものなので空間次元3次元で考える必要がある。

研究代表者は近年、弱収束に関するトロッター・加藤の定理を証明し、シュレディンガー方程式の経路積分表示を『量子測度』(一般化された測度:連続微分可能な関数全体の空間の相対空間)を用いて表現した。ディラック方程式は、電子に対する相対論的な波動方程式であるから、同様の理論が適用出来ると思われた。

## 2. 研究の目的

量子力学などの分野で重要な役割を担う方程式をベクトル値測度で記述し数学的基礎付けをおこなう。(空間1次元のディラック方程式に対しては一瀬孝が1980年代に経路の空間上の測度を構成したが、空間3次元のディラック方程式の経路積分は未だ数学の立場からの厳密な定義が定まっていない。)

当該研究では、空間3次元のディラック方程式の解を数学の立場から厳密に定義づけた経路積分により積分表示をし、その性質を研究する。期間内の目標は以下のものである。

1. ディラック方程式の解をファインマンの経路積分によって『量子測度』(一般化された測度:連続微分可能な関数全体の空間の相対空間)を用いて表現する。

2. ディラック方程式を含む双曲型方程式を『適切』にする関数空間の研究を進める。

## 3. 研究の方法

### (1) ディラック方程式の解の作る半群の生成をする。

Furuya, Kiyoko, Trotter-Kato Theorem for weak convergence on Hilbert space cases, *Advances in Mathematical Sciences and Applications*, Gakkotosho, Tokyo, Japan, Vol. 20, No. 1 (2010), pp. 143-152. (査読有)

Furuya, Kiyoko: GENERALIZED FORM OF THE TROTTER-KATO THEOREM FOR WEAK CONVERGENCE. *Proceedings of The seventh international conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis*, (2012) 18pages. (査読有) の結果を利用してディラック方程式の解の作る半群をコンパクト集合上の連続関数の空間から  $L(L^2, L^2)$  空間への連続線形作用素に一意に拡張できることを示す。

### (2) ディラック方程式のフーリエ変換を考察する。

ディラック方程式の空間変数に関するフーリエ変換を考察し、その性質を研究する。

### (3) 経路積分を定義する

Furuya, Kiyoko: シュレディンガー方程式に対する経路積分-ベクトル値の経路積分を考える. RIMS 共同研究「経路積分と超局所解析の入門」数理解析研究所 講義録 1723, (2011) 79-100.

を参考にしながら、経路積分をベクトル値測度で表わすことを試みる

## 4. 研究成果

これ迄の研究で得られた弱収束に関するトロッター・加藤の定理を用いてシュレディンガー方程式の経路積分表示をベクトル値測度(一般化された測度、すなわち連続微分可能な関数全体の空間の相対空間)で表現し、ポテンシャルが原点で特異点を持つ形式的自己共役な作用素を持つシュレディンガー方程式の解の経路積分を表現した論文を発表した。

研究の土台となったポテンシャルが原点で特異点を持つ形式的自己共役な作用素を持つシュレディンガー方程式の解の経路積分を、弱収束に関するトロッター・加藤の定理とベクトル値測度を用いて表現した論文を中心とした講演の報告集が出版された

この理論をディラック方程式に適用する研究を開始し、ディラック方程式の解の作る半群を、コンパクト集合上の連続関数の空間から適切なベクトル空間への連続線形作用素に一意に拡張した。

現在、得られた結果を論文にまとめているところである。

得られた結果と関係する研究内容に関連して以下の研究集会で発表、関係者との情報交換、討論等を行った。

ベクトル値測度という概念を導入し、ディラック方程式の解を数学の立場から厳密に定義づけられたファインマンの経路積分により積分表示をするアイデアを国際数学会 2014 のサテライト:『第 4 回非線形解析学と最適化理論に関するアジア会議』(National Taiwan Normal University: Taipei, Taiwan 参加者約 210 名)で発表した。物理系の外国人研究者からも関心を持たれ質疑応答を行った。

約 66 名参加、38 の講演が行われた 第 40 回発展方程式研究会では『弱収束に関するトロッター・加藤の定理』を用いてシュレディンガー方程式の解となる縮小半群の生成作用素の性質を述べた。弱収束に関する理論は物理学への応用上重要であるがシュレディンガー方程式については、あまり研究されていないように思われる。弱収束に関するトロッター・加藤の定理を利用した、方程式の解となる縮小半群を用いての応用が期待される。

30 カ国近い国から約 250 人が参加し、約 130 の講演が行われた、第 9 回非線形解析学と凸解析学に関する国際会議:(NACA2015) (Chiang Rai, THAILAND)では、われわれの理論についての最近の論文の内容を中心に紹介した。物理学者から「具体的なポテンシャルについては、どの程度研究が進んでいるのか」と質問を受ける等関心を持たれた。参加者は同じホテルに宿泊し、そのホテルを会場にして会議が開催された事もあり、サウジアラビアの King Saud 大学教授を始め各国の研究者とお互いの研究内容を紹介し、ディスカッションをする機会に恵まれた。

招待を受けて、カナダ数学会夏の学会(参加者数 212 名)に参加。招待講演と、ディスカッションを行なった。関係者に最新の論文の別刷りを配布した。

北京で開催された ICIAM 2015 のサテライトコンファレンス ICIAM 2015 (札幌コンベンションセンター。登録者数 205 名、講演数 12、ポスターセッション数 30)でポスター発表を行なった。ポスターセッションにおいては、何人かとディスカッションをした。関心を示した南京大学研究者には関連論文も渡した。コーヒーブレイクや食事の時も 東北大学、首都大学、北大や東大の院生まで多くの人と情報交換を行なった。

秋の偏微分方程式セミナー(参加者数 27 名 講演数 13)においては、6月に招待されたカナダ数学会の夏のセミナーの様子について日本数学会の総会との違いなども含めて紹介をした。

千葉大学教育学部教授、龍谷大学理工学部教授、大阪大学准教授、島根大学教授等と食事の間も含め、様々な話題についてディスカッションを行った。

従来は、双曲型方程式の well-posedness は  $L^2$ -空間が主であった。しかし斜交境界条件を持つ混合問題などは、ごくやさしい例でもこの空間で解を持たないものがある。この例が well-posed となる空間を構成したことを講演数 41, 参加者 90 名ほどの第 41 回発展方程式研究会で講演した。中央大学理工学部教授、静岡大学大学院総合科学技術研究科教授と Mutational equation に対する適切性定理について議論を重ねた。

5. 主な発表論文等  
(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 6 件)  
KIYOKO FURUYA: On " well posed function spaces " for hyperbolic equations of the simplest type. 第 41 回発展方程式研究会報集, (2015)47-50. (査読なし)

KIYOKO FURUYA: About formally self-adjoint Scherödinger operator with potential. Proceedings of the 9th International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis (Chiangrai, Thailand, 2015), 99-109. (査読あり)

KIYOKO FURUYA: On Formally Self-Adjoint Scherödinger Operators with measurable potential. Mathematics for Nonlinear Phenomena: Analysis and Computation International Conference in honor of Professor Yoshikazu Giga on his 60<sup>th</sup> birthday Hokkaido University Technical Report Series in Mathematics Series #163 August 2015, p.38 . (査読あり)

KIYOKO FURUYA: 形式的に自己共役なシュレディンガー作用素について. 第 40 回発展方程式研究会報告集, (2014) (査読なし)

KIYOKO FURUYA: Vector Valued Measure for Path Integral Representations of a Solution for Dirac Equation. Program Book of ICM Satellite Conference 2014: The Fourth Asian Conference on Nonlinear Analysis and Optimization (Taipei, Taiwan, 2014) August 5-9. pp.73-74. (査読あり)

KIYOKO FURUYA: Formally Self-Adjoint Schrödinger Operators with Real Measurable Potential, Journal of Nonlinear and Convex Analysis. Vol 15, No.5(2014), 1003-1017. (査読あり) <http://www.ybook.co.jp/online-p/JNCA/Op/en/15/jncav15n5p1003-0a/FLASH/index.html>

[学会発表](計 7 件)

第 41 回発展方程式研究会: 2015 年 12 月 25 日-12 月 27 日: 参加者, 約 90 名 講演数, 41 (日本女子大学目白キャンパス: 文京区, 東京)

KIYOKO FURUYA: On "well posed function spaces" for hyperbolic equations of the simplest type.

2015 秋の偏微分方程式セミナー:  
9 月 10 日(木) ~ 12 日(土) (大阪大学待兼山会館(豊中キャンパス)豊中市, 大阪府)  
参加者数 27 名 講演数 13  
KIYOKO FURUYA: カナダ数学会の夏のセミナーについて.

Mathematics for Nonlinear Phenomena: Analysis and Computation International

Conference in honor of Professor Yoshikazu Giga on his 60<sup>th</sup> Birthday: 2015 年 8 月 16 日 - 8 月 18 日 (札幌コンベンションセンター: 札幌, 北海道) 登録者数 205 名, 講演数 12, ポスターセッション数 30

KIYOKO FURUYA: On Formally Self-Adjoint Schrödinger Operators with potential. (ポスター発表)

The 2015 CMS Summer Meeting (カナダ数学会夏のセミナー) 招待: 2015 年 6 月 5 日 - 6 月 8 日, 参加者数 212 名

(Charlottetown, P.E.I., Canada.) KIYOKO FURUYA: On Formally Self-Adjoint Schrödinger Operators with potential.

The 9th International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis, 招待講演 2015 年 1 月 21 日 - 1 月 25 日 参加者数 250 名 講演数 130 (Chiang Rai, THAILAND)

KIYOKO FURUYA: About formally self-adjoint Schrödinger operator with measurable potential.

第 40 回発展方程式研究会: 2014 年 12 月 25 日-12 月 27 日, 参加者数 66 名 講演数 38 (日本女子大学目白キャンパス: 文京区, 東京)

KIYOKO FURUYA: 形式的に自己共役なシュレディンガー作用素について.

ICM Satellite Conference 2014: The Fourth Asian Conference on Nonlinear Analysis and Optimization. 招待・座長 (2014 年 8 月 5 日 - 8 月 9 日) 参加者約 210 名 (Taipei, Taiwan)

KIYOKO FURUYA: Vector Valued Measure for Path Integral Representations of a Solution for Dirac Equation.

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕  
出願状況(計 0 件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
出願年月日：  
国内外の別：

取得状況(計 0 件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
取得年月日：  
国内外の別：

〔その他〕  
ホームページ等

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

古谷 希世子 ( FURUYA Kiyoko )  
お茶の水女子大学・基幹研究院・講師  
研究者番号：80109208