

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 30 年 6 月 15 日現在

機関番号：13901

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2014～2017

課題番号：26610021

研究課題名(和文)モジュレーション空間を用いた相空間解析

研究課題名(英文)Phase space analysis by modulation spaces

研究代表者

杉本 充 (SUGIMOTO, Mitsuru)

名古屋大学・多元数理科学研究科・教授

研究者番号：60196756

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,700,000円

研究成果の概要(和文)：モジュレーション空間と類似の方法で定義される Wiener-amalgam 空間とソボレフ空間との包含関係を解明した。また、モジュレーション空間論の非線形問題への応用にも取り組み、水面波を記述する Davey-Stewartson 方程式の局所適切性を論じた。関連して、非分散型方程式に対する平滑化作用の理論も構築した。さらに、「モジュレーション空間に属する関数と滑らかな関数との合成関数は同じモジュレーション空間に属するか？」という問題に対して、ある肯定的な解答を与えた。

研究成果の概要(英文)：We clarified the inclusion property between Wiener-amalgam spaces, which is defined in a similar way to modulation spaces, and Sobolev spaces. We also consider the application of modulation spaces to non-linear problems and discuss the local well-posedness of the Davey-Stewartson equation which describes a kind of water wave. In connection to it, we construct a theory of smoothing effect of non-dispersive equations. Furthermore, we gave an affirmative answer to the question "Does the composite function of a smooth function and a function in a modulation space belong to the same modulation space?"

研究分野：偏微分方程式論

キーワード：モジュレーション空間 相空間解析 正準変換 分散型方程式 非線形問題

1. 研究開始当初の背景

相空間解析の柱である正準変換を具現化する道具としてのフーリエ積分作用素の理論は、Hörmander (Acta. Math. 1971) によりほぼ確立されたが、それを用いて定量的な解析を扱おうとした場合、ただちに具体的な関数空間上での有界性の問題に直面する。実際、大域的な正準変換を記述するフーリエ積分作用素が L^2 -空間で有界であることが示されるまでには、Ruzhansky-Sugimoto (Comm. PDE. 2006) まで待たなければならなかった。さらに Seeger-Sogge-Stein (Ann. Math. 1991) の結果によれば、 L^2 -有界なフーリエ積分作用素であっても一般には L^p -有界 ($p \neq 2$) とはならない。したがって、 L^p -空間の自然な代用物を見つけ出すことも求められていた。一方、1980 年台初頭に Feichtinger により導入されたモジュレーション空間は、近年基礎研究が進展し、偏微分方程式論にも応用され始めていた。例えば Bényi-Gröchenig-Okoudjou-Rogers (J. Funct. Anal. 2007) により、(ポテンシャルを持たない) シュレディンガー時間発展作用素 (L^p -有界ではない!) はモジュレーション空間上では有界となる事が示されていた。また、モジュレーション空間は時間変数と周波数変数を同時に扱う短時間フーリエ変換を用いて定義されており、正準変換の基本的な考え方とも符合する。これらの事実に着目し、この関数空間を枠組みとした定量的な相空間解析を展開することを試みるべきであるとの機運が、研究代表者の周辺では高まってきていた。

2. 研究の目的

まずはモジュレーション空間の基本的性質の解明を基本課題として取り組み、定量的な相空間解析の基本的道具として整備する。さらにその試金石とするべく、応用課題として偏微分方程式の諸問題にも取り組む。具体的には、以下のことについて研究する：

基本課題：モジュレーション空間上において

1. 正準変換は閉じているか？
2. 非線形作用は閉じているか？
3. 波動作用素は有界であるか？

などを解明する。

応用課題：変数係数 (ポテンシャルを持つ場合も含む) の場合など、より一般の分散型方程式に対する

1. 時空間評価式の導出とその非線形初期値問題 (特異データを持つ場合) の解の時間大域的存在
2. Carleman 評価式の導出とその解の一意接続性

などについて調べる。

3. 研究の方法

研究代表者および連携研究者が研究討論会において相互にアイデアを提示し、それを検証しあう形式で、以下のプログラムを実施する：

[基本課題] このパートでは、モジュレーション空間の理論の骨格づくりに貢献してきた気鋭の研究者・富田の協力を仰ぎ、その未解決な諸問題に取り組む：

- ・正準変換はモジュレーション空間上で閉じているかに関しては、大域的な変換としては (一次変換以外は) 否定的であることが知られているが、錐上の斉次な変換についてはその成否は不明である。応用上はこれで十分であるので、その解明をめざす。
- ・非線形作用がモジュレーション空間上で閉じているかに関しては、ソボレフ空間などの場合の証明に用いられる para-differential の理論を修正することにより示す。
- ・波動作用素のモジュレーション空間上での有界性を、Yajima (J. Math. Soc. Japan, 1995) の L^p 上での場合の方法を修正することにより示す。

[応用課題] このパートは、主に杉本が単独で遂行する。基本的な方針として、

- ・方程式を正準変換により標準形に変形する (「フーリエ積分作用素」の理論を用いる)。
- ・標準形に対する評価式を求める
- ・正準変換により、もとの方程式に関する評価式を得る (基本課題における正準変換に関する成果を用いる)。

という相空間解析の処方箋を、モジュレーション空間の上で実行する。

また、以上の研究成果を様々なセミナー・研究集会等において口頭発表するとともに、本研究による研究成果の公表および関連する海外の研究者との意見交換を目的として、国際研究集会を開催する。

4. 研究成果

初年度において、モジュレーション空間と類似の方法で定義される Wiener-amalgam 空間とソボレフ空間との包含関係を解明した。モジュレーション空間とソボレフ空間との包含関係は既に知られており、これとほぼ同様の結果が得られるものと考えて研究を進めていたが、Wiener-amalgam 空間固有の何らかの性質が反映するためか、全く予想外の結果に到達したことは少なからず驚きであった。この特殊な性質を偏微分方程式の問題にも反映させることにより、新たな展開が期待される。

第2年度では、この Wiener-amalgam 空間とソボレフ空間との包含関係をふまえて、Wiener-amalgam 空間とベゾフ空間との包含関係の解明をめざし、一部の指数の場合に解答を与えた。また、モジュレーション空間論

の非線形問題への応用にも取り組み、水面波を記述する Davey-Stewartson 方程式の局所適切性を論じた。その際、通常のソボレフ空間では取り込むことのできない特異な初期値に対しても、モジュレーション空間の枠組みでは議論が可能である事を示した。

第3年度には、応用課題の一環として、非分散型方程式に対する平滑化作用の理論を構築した。これまでの研究では、主表象の勾配が0でないという「分散型」の仮定のもとにおいては「比較原理」が平滑化評価式を導出するためのひとつの強力な手段となることがわかっていたが、今年度の研究により、「非分散型」の場合にもそれが適用可能である事が示され、それにより示される平滑化評価式を「不変評価式」と名付けることにより、理論の体系化を図った。また一般化としては、スペクトル理論の枠組みにおいて基本的な等式を示すことにより、いわゆる「スペクトル論的比較原理」の原型を見い出した。以上の成果は今後の発展が大いに期待されるものである。

研究期間を延長して臨んだ最終年度には、これまでの最大の懸案事項となっていた「モジュレーション空間に属する関数 f と滑らかな関数 F に対して、それらの合成関数 $F(f)$ は同じモジュレーション空間に属するか？」という基本的な問題に対して重点的に取り組んだ。その成果として（指数に関する「ある制限」のもと）肯定的な解答を与えることができた。同じ問題のソボレフ空間やベゾフ空間に対する解答は1980年代に既に完全に与えられていたが、モジュレーション空間に対しては長らく未解決であった。この成果は、この問題におけるひとつのマイルストーンとも言うべきものである。「ある制限」が何処まで緩められるかについては未解決問題として残されたが、今後これに関する何らかの理論発展がなされていくことを期待したい。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 14 件)

[1] N. Bez & M. Sugimoto, *On the best constant and extremisers for some smoothing estimates*, J. Anal. Math. **131** (2017), 159-187. 査読有

[2] N. Bez & M. Sugimoto, *A survey on optimal smoothing estimates and trace theorems*, Adv. Math. (China) **45**, 801-816, 2016. 査読有

[3] N. Bez and S. Machihara & M. Sugimoto, *Extremisers for the trace theorem on the sphere*, Math. Res. Lett. **23** (2016), 633-647. 査読有

[4] M. Ruzhansky & M. Sugimoto, *Smoothing estimates for non-dispersive equations*, Math. Ann. **365** (2016), 241-269. 査読有

[5] N. Bez & M. Sugimoto, *Some recent progress on sharp Kato-type smoothing estimates*, Contemp. Math. **653**, 41-50, 2015. 査読有

[6] M. Sugimoto, *A vector fields approach to smoothing and decaying estimates for equations in anisotropic media*, Nonlinear Dynamics in Partial Differential Equations, Adv. Stud. Pure Math. **64**, 319-326, 2015. 査読有

[7] Bez and H. Saito & M. Sugimoto, *Applications of the Funk-Hecke theorem to smoothing and trace estimates*, Adv. Math. **285** (2015), 1767-1795. 査読有

[8] M. Sugimoto, B. Wang & R. Zhang, *Local well-posedness for the Davey-Stewartson equation in generalized Feichtinger algebra*, J. Fourier Anal. Appl. **21** (2015), 1105-1129. 査読有

[9] N. Bez & M. Sugimoto, *Optimal forward and reverse estimates of Morawetz and Kato-Yajima type with angular smoothing index*, J. Fourier Anal. Appl. **21** (2015), 318-341. 査読有

[10] M. Ruzhansky & M. Sugimoto, *On global inversion of homogeneous maps*, Bull. Math. Sci. **5** (2015), 13-18. 査読有

[11] Cunanan and M. Kobayashi & M. Sugimoto, *Inclusion relations between L^p -Sobolev and Wiener amalgam spaces*, J. Funct. Anal. **268** (2015), 239-254. 査読有

- [12] M. Ruzhansky & M. Sugimoto, *Trace theorems: critical cases and best constants*, Proc. Amer. Math. Soc. **143** (2015), 227-237. 査読有
- [13] N. Bez & M. Sugimoto, *Optimal constant for a smoothing estimate of critical index*, Fourier Analysis, Trends in Mathematics, 1-7, Springer Cham Heidelberg New York Dordrecht London, 2014. 査読有
- [14] J. Cunanan & M. Sugimoto, *Unimodular Fourier multipliers on Wiener amalgam spaces*, J. Math. Anal. Appl. **419** (2014), 738-747. 査読有

[学会発表] (計 39 件)

- [1] M. Sugimoto, 2018年2月21日, 研究集会 (於 イーグレ姫路) —偏微分方程式姫路研究集会— 「Optimal estimates of Kato-Yajima type with angular smoothing」
- [2] M. Sugimoto, 2018年1月26日, 研究集会 (於 中央大) —Hyperbolic Partial Differential Equations and Related Topics— 「A local-to-global boundedness argument and Fourier integral operators」
- [3] 杉本充, 2017年12月5日, 談話会 広島大学大学院理学研究科 「制限定理と関連する偏微分方程式論の諸問題」
- [4] M. Sugimoto, 2017年11月18日, 研究集会 (於 中央大) —Recent Topics on Partial Differential Equations — 「Spectral comparison of smoothing estimates」
- [5] M. Sugimoto, 2017年9月26日, 談話会 (於 インドネシア・Gadah Mada 大) 「Trace theorems and related topics on PDE」
- [6] M. Sugimoto, 2017年8月17日, 研究集会 (於 スウェーデン・Linnaeus 大) —The 11th ISAAC Congress— 「Spectral Comparison of Smoothing Estimates」
- [7] M. Sugimoto, 2017年8月4日, 研究集会 (於 日本大) —Harmonic Analysis and its Applications in Tokyo 2017 — 「Remarks on nonlinear operations on modulation spaces」
- [8] 杉本充, 2017年7月12日, 談話会 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 「制限定理と関連する偏微分方程式論の諸問題」
- [9] M. Sugimoto, 2017年7月5日, 研究集

- 会 (於 ロシア・North-Eastern Federal University)
— 8th International conference on Mathematical Modeling — 「Spectral comparison of smoothing estimates and its applications」
- [10] M. Sugimoto, 2017年6月6日, 研究集会 (於 イタリア・Politecnico di Torino) —Aspects of Time-Frequency Analysis— 「Remarks on nonlinear operations on modulation spaces」
- [11] M. Sugimoto, 2017年2月21日, 研究集会 (於 東京理科大学神楽坂キャンパス) —Critical Exponents and Nonlinear Evolution Equation 2017— 「Spectral comparison of smoothing estimates and its applications」
- [12] 杉本充, 2016年11月26日, 代数解析奈良研究集会 (奈良女子大) 「Optimal smoothing estimates and trace theorems」
- [13] M. Sugimoto, 2016年11月9日, 研究集会 (於 ウズベキスタン・ブハラ州立大) —Modern problems of applied mathematics and information technologies - Al-Khorezmiy 2016 — (Plenary talk) 「Optimal smoothing estimates and a related PDE problem」
- [14] M. Sugimoto, 2016年11月3日, 研究集会 (於 ピアザ淡海 滋賀県立県民交流センター) —Linear and Nonlinear Waves, No.14 — 「Optimal smoothing estimates and related topics」
- [15] 杉本充, 2016年9月2日, 第55回実函数論・関数解析学合同シンポジウム (首都大) 「平滑化評価式および制限定理の最良定数と関連する話題」
- [16] M. Sugimoto, 2016年8月15,16,18日, 研究集会 (於 中国・Tsinghua Sanya International Mathematics Forum) —Fourier Analysis and Applications Workshop— 「Optimal trace theorems and a related PDE problem」
- [17] M. Sugimoto, 2016年8月12日, 埼玉大学第75回解析ゼミ (於 埼玉大学・理学部) 「Smoothing estimates for non-dispersive equations」
- [18] M. Sugimoto, 2016年8月1日, 研究集会 (於 韓国・延世大学校) —4th East Asian Conference in Harmonic Analysis and Applications— 「A criterion for the global boundedness of locally bounded integral operators」
- [19] M. Sugimoto, 2016年7月2日, 実解析学セミナー (於 大阪大学・理) 「Optimal trace theorems and their relation to a PDE problem」
- [20] M. Sugimoto, 2016年3月25日, 談話会 (於 中国・北京大学) 「Optimal

smoothing estimates and trace theorems]

[21] 杉本充, 2016年3月19日, 日本数学会 2016年度年会 (筑波大) —2015年度第14回解析学賞受賞特別講演—「シュレディンガー方程式の角方向への平滑化作用について」

[22] M. Sugimoto, 2016年3月2日, 研究集会 (於 埼玉大) —Harmonic Analysis, Geometric Analysis and PDE workshop —「Optimal smoothing estimates and trace theorems」

[23] M. Sugimoto, 2016年1月27日, 研究集会 (於 九州大学西新プラザ) —第33回九州における偏微分方程式研究集会—「Optimal smoothing estimates」

[24] 杉本充, 2016年1月10日, 研究集会 (於 金沢大学サテライトプラザ)—スペクトル・散乱 金沢シンポジウム—「Smoothing estimates for dispersive equations and related topics」

[25] M. Sugimoto, 2015年11月29日, 研究集会 (於 早稲田大) —Harmonic Analysis and its Applications in Tokyo 2015—「On a condition for the global L^p -boundedness of Fourier integral operators」

[26] M. Sugimoto, 2015年10月29日, Pure Analysis and PDEs seminar (於 英国・Imperial College London) 「Optimal smoothing estimates」

[27] M. Sugimoto, 2015年8月4日, 研究集会 (於 中国・マカオ大) —The 10th ISAAC Congress—「Global regularity properties of Fourier integral operators」

[28] 杉本充, 2015年7月25日, 神楽坂解析セミナー (於 東京理科大・理) 「平滑化評価式および制限定理の最良定数について」

[29] 杉本充, 2015年6月8日, 偏微分方程式セミナー (於 北大・理) 「Optimal constants and extremisers for smoothing and trace estimates」

[30] 杉本充, 2015年1月15日, 第1回解析学の耳袋 (於 静岡県沼津市・プラサヴェルデ) 「分散型方程式における比較原理」

[31] M. Sugimoto, 2014年10月28日, セミナー (於 中国・北京大学) 「On a systematic understanding of smoothing estimates for water wave equations」

[32] M. Sugimoto, 2014年9月18日, セミナー (於 ウズベキスタン・ウズベキスタン国立大) 「A vector fields approach to smoothing and decaying estimates for equations in anisotropic media」

[33] M. Sugimoto, 2014年9月15日, 研究集会 (於 ウズベキスタン・ウズベキスタン国立大サマルカンド分校) —Modern problems of applied mathematics and information technologies - Al-Khorezmiy

2014— (Plenary talk) 「On a systematic understanding of smoothing estimates for water wave equations」

[34] M. Sugimoto, 2014年9月10日, 研究集会 (於 大阪大学・理) —Asymptotic Analysis of Nonlinear Dispersive and Wave Equations — 「Smoothing estimates for third order equations in two spatial dimensions」

[35] 杉本充, 2014年9月7日 第3回岐阜数理科学研究会 (於飛騨高山まちの博物館) 「分散型方程式の比較原理に関する最近の話題」

[36] M. Sugimoto, 2014年7月14日, 研究集会 (於 中国・牡丹江師範学院) —2nd East Asian Conference in Harmonic Analysis and Applications — 「Global regularity properties of Fourier integral operators」

[37] 杉本充, 2014年6月21日, 応用解析研究会 (於 早稲田大・先進理工) 「シュレディンガー方程式の平滑化評価式とスペクトル論的比較原理について」

[38] M. Sugimoto, 2014年6月18日, 研究集会 (於 早稲田大・基幹理工) —JSPS-DFG Japanese-German Graduate Externship Kickoff Meeting— 「On a systematic understanding of smoothing estimates for water wave equations」

[39] 杉本充, 2014年4月26日 南大阪応用数学セミナー (於 大阪府立大) 「シュレディンガー方程式におけるスペクトル論的比較原理について」

〔図書〕 (計 1 件)

[1] 訳書 (新井仁之, 高木啓行, 千原浩之との共訳) プリンストン解析学講義3「実解析」エリアス・M. スタイン, ラミ・シャカルチ著 (日本評論社) 2017年12月刊

〔産業財産権〕

○出願状況 (計 0 件)

○取得状況計 0 件)

〔その他〕

ホームページ等

<http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~sugimoto/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

杉本 充 (SUGIMOTO MITSURU)

名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・教授

研究者番号: 60196756

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

富田 直人 (TOMITA NAOHITO)
大阪大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：10437337

寺澤 祐高 (TERASAWA YUTAKA)
名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・
准教授
研究者番号：90546160

(4) 研究協力者

なし