

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 8 月 15 日現在

機関番号：12613

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2014～2016

課題番号：26610034

研究課題名(和文)カオスの遍歴現象の数学的特徴づけ

研究課題名(英文)Mathematical characterization of chaotic itinerancy

研究代表者

齊木 吉隆 (SAIKI, YOSHITAKA)

一橋大学・大学院商学研究科・准教授

研究者番号：20433740

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,900,000円

研究成果の概要(和文)：カオスの遍歴現象は「複数のカオス的な状態を不規則に渡り歩き続ける高次元複雑現象」として知られているものの、確固たる数学的特徴づけを欠いた概念である。その数学的特徴づけの手がかりを得る目的で重要性をもつミニマルモデルを解析した。そのひとつが間欠的性質をもつ2次元トーラス写像であり、x方向は拡大的な性質をもち、y方向はxの値によって拡大的であったり縮小的であったりするものである。それが生み出すダイナミクスは不安定次元の異なる周期点の共存と準周期軌道の存在が鍵となっていることを見出した。また、その研究過程で準周期軌道の存在に着目してその上で定義される関数のパークフ平均を高速で求める手法を開発した。

研究成果の概要(英文)：Chaotic itinerancy is known as "Complex phenomena wandering among multi chaotic states irregularly", but does not have a certain mathematical characterization. We analyze a dynamics of a minimal model having the inevitable properties to be chaotic itinerancy. One of the models we studied was a two-dimensional torus map showing intermittency. It is expanding in x-direction and expanding or contracting in y-direction depending on the x value. We find that behind the dynamics exist the coexistence of repellers and saddles and quasi-periodic orbits. Through this study we develop a technique for calculating the Birkhoff average along a quasiperiodic orbit.

研究分野：力学系、応用数学

キーワード：力学系 数値解析 応用数学 複雑現象の数理

1. 研究開始当初の背景

高次元力学系が示すカオスの代表例は流体乱流であろう。多くの流体運動は偏微分方程式であるナビエ・ストークス方程式によって記述されることが知られているが、単に方程式が高次元(無限次元)であるばかりかリアプノフ次元などで見積もられる実効次元も非常に大きく、力学系的な理解は十分になされていない。実際、流体乱流の振る舞いは既に存在する力学系理論では説明しがたい現象が豊富に存在している。たとえば、乱流運動は時間発展において常に同じような乱れ具合を示すわけではなく、平穏な振る舞いをする時間帯と激しい振る舞いを時間間欠的に繰り返すことが知られている。

流体乱流の研究はナビエ・ストークス方程式の大規模直接数値シミュレーションで得られた解の統計解析に留まりがちである。しかし、上記のような運動のメカニズム解明には力学系的な理解が必須であると考えられるため、高次元力学系特有のカオス現象に関する理論整備が求められている。

一方、高次元力学系特有の現象に「複数のカオス的な状態を不規則に渡り歩き続ける」性質をもつカオスの遍歴現象がある。これは、金子邦彦教授(東京大学)、津田一郎教授(北海道大学)、池田研介教授(立命館大学)らによって多素子結合系、脳科学、レーザーなどに関する高次元力学系において独立に発見され、それらの振る舞いの中に共通項が見出され名づけられた。その後、ミルナーアトラクタなど幾つかの観点で特徴づけの試みはなされてきたものの、今のところ数学的定義がなく理論整備も不十分な状況にあった。

2. 研究の目的

流体乱流・気象など我々の身のまわりの高次元ダイナミクスには、低次元力学系が主たる研究対象となっている既存の力学系理論では説明しきれない振る舞いが多く観察される。一方、脳科学等の分野における高次元力学系の研究で「カオスの遍歴現象」とよばれる「複数のカオス的な状態を不規則に渡り歩き続ける複雑現象」が知られていた。しかしながら、この現象に対する明瞭な数学的定義はなく、理論整備も不十分な状況にあった。そこで高次元複雑現象の力学系的理解を進めるために、カオスの遍歴現象がもつべき最小限の性質を持ち合わせるミニマルモデルを考察することにした。研究代表者らは、計算機を用いて不安定周期軌道や安定/不安定多様体を同定する先端的な技術を身につけており、本研究ではカオスの遍歴現象をこれらの道具を用いて数学的に特徴づけたいと考えた。

3. 研究の方法

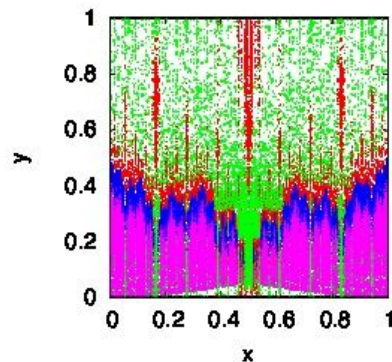
カオスの遍歴と多くの共通の構造をもって

いると考えられるオン・オフ間欠性に着目し、その種の性質をもつ低次元写像、主に2次元トラス写像を考察した。その際には研究代表者らが検出に関する先端的な技術をもつ不安定解、特に不安定周期軌道と不安定準周期軌道に関する高精度数値計算を行った。具体的には考察する写像が Skew-product 型であること、ならびに x 方向に3倍写像であることを利用し、3進数のシフト写像として x 変数の時間発展を求めることによって x 方向のカオス性による誤差の蓄積を避けて高精度計算をおこなった。 y 方向のダイナミクスは、 x の値によって拡大的であったり縮小的であったりするものであり誤差の蓄積は比較的小さい。

4. 研究成果

本研究ではカオスの遍歴現象の数学的特徴づけの手がかりを得る目的で、現象において特に重要と思われる性質をもつミニマルモデルを解析することにした。その性質のひとつが複数状態間をさまよう間欠性である。それをもつ2次元トラス写像であり、 x 方向は拡大的な性質をもち、 y 方向は x の値によって拡大的であったり縮小的であったりするものである。研究代表者らは、間欠的現象を生み出すダイナミクスのひとつのメカニズムとして、不安定次元の異なる周期点の共存と準周期軌道の存在とがあることを見出した。

周期軌道に関しては一定周期をもつものを網羅的に検出し、不安定次元ならびにその振る舞いによって分類をおこなった。不安定次元は1であるものと2であるものが共存しており、それらが複雑な入れ子構造を示すことを明らかにした。下図は周期10の周期軌道を分類したもので、赤と青が不安定次元2、緑と紫が不安定次元1の周期軌道である。また、赤と緑は上の領域と下の領域を渡り歩く周期軌道であり、青と紫は常に下の領域に留まり続ける周期軌道である。

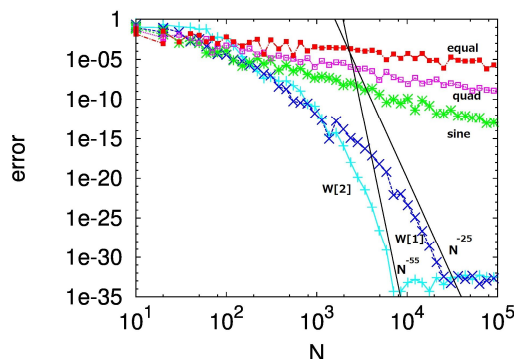


この系には周期軌道の他に $x=0.5$ 上をはじめとして多数の準周期軌道が存在しており、こ

れが上の領域と下の領域を一般の軌道が渡り歩く根源となっていることが示唆される。また、本研究において準周期軌道にまつわるバーコフ平均を高速で求める手法を開発した。準周期軌道の性質のひとつにリアプノフ指数 0 があるが、通常のバーコフ平均の収束オーダーは軌道長 N に対して $1/N$ であるために有限長を取り扱う数値計算によってリアプノフ指数が 0 か否かを判定することは困難である。しかし、高速化手法を適用することによって、比較的短い計算時間において 4 倍精度の数値計算における丸め誤差 (10^{-30} 程度)と同程度のオーダーでリアプノフ指数が 0 か否かを判断することが可能となった。下図は準周期軌道のバーコフ平均 (回転数) を各種重み付きバーコフ平均によって計算した際の収束過程をあらわしたものである。水色で示された C 級関数

$$w[2](t) = \begin{cases} \exp(-1/(t^2(1-t)^2)) & (0 < t < 1) \\ = 0 & (\text{others}) \end{cases}$$

という重みを適用した場合の収束オーダーが実測値で N^{-55} 程度であることがわかる。



以上に述べた研究に加えて、以下の研究をおこなった。

・カオス力学系のネットワーク解析：カオスの不変集合には無限個の不安定な周期軌道が稠密に埋め込まれており、カオス軌道はしばしば周期軌道間の「不規則的遷移」とみなされる。本研究ではいくつかのカオス力学系から多数の周期軌道を検出し、その周期軌道をノードと見立てて、各周期軌道近傍間のカオス軌道の存在によって各ノード間のリンクを与えてネットワークを構築した。そのネットワークはスケールフリー構造をもち、また、次数の高いノード (周期軌道) はカオスの統計性質を良く近似するものであることを見出した。

・多地域景気循環モデルの解析：内生的に景気変動を引き起こす地域が結合した多地域カオスの景気循環モデルを解析して同期レベルが間欠的に変遷することを確認し、不安定次元の異なる不変集合の共存がその変遷

を駆動していることを見出した。

・アトラクタ・マーキング・クライシスの周期軌道解析：カオス力学系が引き起こす大域的な構造変化のひとつであるアトラクタ・マーキング・クライシスを偏微分方程式であらわされる力学系に関して調べた。そして、クライシス前後に存在する周期軌道を分類するとともに、各種周期軌道の発生過程やカオティックサドルとの対応関係を明らかにした。

5. 主な発表論文等

[雑誌論文] (計 4 件)

Y. Saiki, E. Sander and J. A. Yorke, Generalized Lorenz Equations on a Three-Sphere, accepted for publication in European Physical Journal Special Topics, 2017. (査読有)

S. Das, C. B. Dock, Y. Saiki, M. Salgado-Flores, E. Sander, J. Wu and J. A. Yorke, Measuring quasiperiodicity, Europhysics Letters 114, 40005:1-6, 2016. (査読有)

S. Das, Y. Saiki, E. Sander and J. A. Yorke, Quasiperiodicity: Rotation Numbers, Chapter 7, The Foundations of Chaos Revisited: From Poincare to Recent Advancements (Understanding Complex Systems), Springer, 103-117, 2016. (査読有)

Y. Saiki, M. Yamada, A. Chian, R. Miranda and E. Rempel, Reconstruction of chaotic saddles by classification of unstable periodic orbits: Kuramoto-Sivashinsky equation, Chaos 25, 103123:1-6, 2015. (査読有)

[学会発表] (計 13 件)

齊木吉隆, 複雑現象における同期, 研究集会「現象と数理モデル 2016」富山第一ホテル (富山県富山市), 2016 年 12 月 27 日.

S. Das, Y. Saiki, E. Sander, J. A. Yorke, Weighted Birkhoff Average and Quasiperiodicity, JSIAM-ANZIAM 特別セッション, 日本応用数理学会 (福岡県小倉市), 2016 年 9 月 13 日.

齊木吉隆, 準周期軌道にまつわるバーコフ平均の高速計算とその応用, 第 14 回ダイナミクス研究会中野, 明治大学 (東京都中野区), 2016 年 4 月 16 日.

齊木 吉隆, Multi-chaos : A Low Dimensional Paradigm for High Dimensional Chaos, 研究集会「現象と数理モデル」, 姫路キャッスルグランヴィリオホテル(兵庫県姫路市), 2016年3月8日.

齊木吉隆, 力学系が生み出す準周期軌道の同定手法について, Perspectives in Mathematical Sciences, 岡山大学(岡山県岡山市), 2016年1月6日.

齊木吉隆, 多地域景気変動における同期現象, MIMS 共同研究集会「可積分系が拓く現象数理モデル」, 明治大学(東京都中野区), 2015年11月6日.

齊木吉隆, 双曲性が崩れた状況における不安定周期軌道展開の試み, 統計数理研究所 数学協働プログラムワークショップ「大自由度分子系における化学反応機序の理解と制御」, 北海道大学(北海道札幌市), 2015年11月1日.

齊木吉隆, Unstable periodic orbits in a coupled intermittent map, RIMS 研究集会「ランダム力学系理論とその応用」, 京都大学(京都府京都市), 2015年9月30日.

齊木吉隆, 坂上貴之, 中野直人, データ同化手法に関する数理科学的諸相と今後の展望, 日本応用数理学会, 金沢大学(石川県金沢市) 2015年9月10日,

齊木吉隆, 多地域景気変動モデルにおけるカオスの遍歴: 数理的側面, RIMS 共同研究「マクロ経済動学の非線形数理」, 京都大学(京都府京都市), 2015年9月14日.

K.Esashi, Y.Saiki, T.Onozaki, Chaotic Itinerancy in Regional Business Cycle Synchronization, The 9th International Conference on Nonlinear Economic Dynamics NED2015, 中央大学(東京都八王子市), 2015年6月27日.

齊木吉隆, 非双曲力学系の不安定周期軌道解析, 関東力学系セミナー, 東京大学(東京都目黒区), 2014年11月21日.

齊木吉隆, 同期現象の不安定周期軌道解析, 金融研究会, 一橋大学(東京都国立市), 2014年4月10日.

〔その他〕

ホームページ等

<http://www.cm.hit-u.ac.jp/~saiki/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

齊木 吉隆 (SAIKI, Yoshitaka)
一橋大学・大学院商学研究科・准教授
研究者番号: 20433740

(2) 研究協力者

江刺 邦彦 (ESASHI, Kunihiro)
小野崎 保 (ONOZAKI, Tamotsu)
小林 幹 (KOBAYASHI, Miki U)
佐藤 譲 (SATO, Yuzuru)
山田 道夫 (YAMADA, Michio)
Abraham C.-L. Chian
Suddhasattwa Das
Chris B. Dock
Rodrigo A. Miranda
Martin Salgado-Flores,
Erico L. Rempel
Evelyn Sander
Jin Wu
James A. Yorke