

平成 29 年 6 月 14 日現在

機関番号：62615

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2014～2016

課題番号：26730009

研究課題名(和文) 充足可能な制約充足問題に対する近似アルゴリズムの研究

研究課題名(英文) Research on Approximation Algorithms for Satisfiable Constraint Satisfaction Problems

研究代表者

吉田 悠一 (Yoshida, Yuichi)

国立情報学研究所・情報学プリンシプル研究系・准教授

研究者番号：50636967

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,200,000円

研究成果の概要(和文)：制約充足問題とは、変数集合と制約の集合が入力として与えられ、制約を全て充足するように変数に値を割り当てる問題である。本研究では、充足可能な制約充足問題に関する近似アルゴリズム及び近似困難性を与える為に、その代数的構造に関する研究を行った。特に制約充足問題の近似困難性を示す為に使われる性質検査と呼ばれる枠組みに対する研究に取り組んだ。その結果、代数的な性質のうち定数時間で検査可能なものの必要十分条件や、与えられた割り当てが充足解かどうかを定数時間で検査可能な制約充足問題の必要十分条件を導出することに成功した。

研究成果の概要(英文)：The constraint satisfaction problem is a problem in which a set of variables and a set of constraints are given and the goal is assigning values to variables so that all the constraints are satisfied. In this research, in order to give approximation algorithms and approximation hardness of satisfiable constraint satisfaction problems, we studied its algebraic structure. Especially, we focused on a framework called property testing, which is used to derive approximation hardness of constraint satisfaction problems. As a result, we succeeded in deriving the necessary and sufficient condition of algebraic properties that can be tested in constant time and the necessary and sufficient condition of a constraint satisfaction problem for which the satisfiability of an assignment can be tested in constant time.

研究分野：理論計算機科学

キーワード：制約充足問題 近似アルゴリズム 性質検査

## 1. 研究開始当初の背景

制約充足問題 (CSP) とは、変数集合  $V$  と制約の集合  $C$  が入力として与えられ、制約を全て充足するように変数に値を割り当てる問題である。全ての制約が充足出来る割り当てが存在するとき、その入力は充足可能と呼ばれ、その様な割り当てを充足解と呼ぶ。充足可能でない入力は充足不能と呼ばれる。CSP は計算機科学のあらゆる分野に現れる基本的な問題であり、用いる制約を変えることで様々な問題を表現できる。例えば初めて NP 完全と示された問題である充足可能性問題 (SAT) や、グラフの三彩色性、線形連立方程式など多様な問題が表現できる。

残念ながら多くの CSP は NP 完全であるので、全ての制約を満たすのではなく、出来るだけ多くの制約を充足することを目的とする最大制約充足問題 (Max CSP) がよく研究されている。例えばグラフの最大カット問題は Max CSP の代表例である。

もちろん Max CSP それ自体は CSP よりも難しく NP 困難である。そこで興味の対象は近似アルゴリズムであり、どの程度の近似度であれば多項式時間で得られるかが自然な問いとなる。

Max CSP に対する近似度に関する研究は、充足不能な入力が与えられると仮定した場合には、解決されていると言って良い。なぜならばこの場合は、任意の用いる制約に対して、(ある予想のもとで) タイムな近似度を与える多項式時間アルゴリズムが知られているからである。ここでタイムとは、その近似度を少しでも超える近似度を達成することは NP 困難になってしまうことを指す。

これほど一般的な成果が得られた理由は、入力が充足不能と仮定することにより、近似アルゴリズムとして半正定値計画法 (SDP) と呼ばれる数値最適化手法さえ考えれば良くなるからである。しかし入力が充足可能な場合は、代数的なアルゴリズムにより、突然良い近似度が得られることがある。例えば線形連立方程式を例にとると、充足不能と仮定した場合には  $1/2$  より少しでも高い近似度を得るのは NP 困難であるが、充足可能な場合にはガウスの消去法により実際に充足解が得られる。つまり近似度を 1 に出来る。このような事実を説明する一般的な理論は存在せず、CSP に内在する代数的な性質を解明し、それを利用したアルゴリズムを設計する必要がある。

## 2. 研究の目的

本研究の目標は、充足可能な入力に対する近似可能性を、特に代数的性質を利用して解明することである。CSP の研究は、もともと充足可能性を判定する問題から始まった。入力が充足不能な場合の研究が完了した今こそ、入力が充足可能な場合に再挑戦する時であると言える。

## 3. 研究の方法

本研究は理論的な内容であるため個人での研究が中心であったが、適宜国内外の研究者と共同で研究を行った。具体的には [大野-吉田, Random Structures and Algorithms' 16] では表現論と呼ばれる理論が必要となった為、その専門家である Preferred Infrastructure の大野氏と、[Chen-Valeriote-吉田, FOCS' 16] では普遍代数と呼ばれる道具が必要となった為、その専門家である Universidad del País Vasco の Chen 氏と McMaster University の Valeriote 氏と共同研究を行った。また得られた研究成果を広めるために、国内外で開催される会議においてチュートリアル講演を行った。

## 4. 研究成果

研究を行う過程において、多項式時間で得られるタイムな近似度を得る一般的なアルゴリズムを与えるには未だ困難が多いことが判明した。もしその様なアルゴリズムが存在するとすれば、SDP とガウスの消去法を内包するアルゴリズムとなるはずであるが、前者は連続的なユークリッド空間上の最適化手法、後者は離散的な有限体上の求解手法であるため、組み合わせることが困難であった。

そこで視点を変え、近似困難性を示す為に頻りに用いられる確率的検査可能証明 (PCP) に注目した。PCP の中で最も重要な要素技術は性質検査と呼ばれる枠組みである。性質検査では、与えられた関数がある性質を満たすか、その性質を満たすにはほど遠いかを、その関数に定数回クエリするだけで高い確率で判定することを目的とする。代数的な性質を内在する CSP の近似困難性を示すために考える性質検査では代数的な性質を検査することになる。そこで代数的な性質に対する性質検査についての研究を行うこととした。

## (1) 有限体上の関数のアフィン不変な性質の定数クエリ検査可能性の特徴付け

性質検査の分野における究極の問いは「定数回のクエリで検査可能な性質の特徴付け、即ち必要十分条件を得る」ことである。[吉田, STOC' 14] では、有限体上の関数に対する代数的な性質、即ちアフィン変換に閉じた性質について、その様な必要十分条件を得ることに成功した。

上記の結果を得るために、ブーリアン関数の高階フーリエ解析と呼ばれる数学的道具を利用した。まずブーリアン関数のフーリエ解析では、関数を線形関数の線形結合で表して解析する。フーリエ解析を用いると、任意の関数が、定数個の線形関数の線形結合、即ち構造部分、と (線形関数にとっての) ノイズに分解できることを示すことが出来る。これに対して、高階フーリエ解析では、任意の関数が、定数個の低次の多項式の関数、即ち構造

部分、と(低次の多項式にとっての)ノイズに分解できることを示すことができる。

定数クエリで検査できる性質の必要十分条件をおおまかに述べると、ある関数とその性質を満たすかどうかを、その関数を分解したときの構造部分を見るだけで判定できるのであれば、それは定数クエリで検査可能であり、そうでなければ定数クエリで検査可能ではない。

## (2) 有限体上の関数のアフィン不変な性質の定数クエリ検査可能性の特徴づけの単純化

先に述べた(1)の結果は初めて定数クエリで検査可能なアフィン不変な性質の必要十分条件を得たという意味で意義深い。しかし、その必要十分条件自体は非常に複雑であり、具体的な性質の定数クエリ検査可能性・不可能性を示すのには利用しにくいという欠点があった。そこで[吉田, SODA' 16]では超準解析を用いることにより、より単純な必要十分条件を得ることに成功した。超準解析を用いることにより異なる入力ビット数の関数列の極限を考えることが出来るようになる。(1)の必要十分条件が複雑であった理由の一つにエラーパラメータが多数存在していたことが挙げられるが、極限を考えることでこれらが0に収束し消すことが出来るようになる。その結果、比較的単純な必要十分条件を得ることに成功した。この新しい必要十分条件を利用することで、これまで定数クエリで検査可能と分かっていた性質がそうであると示すこともできた。

## (3) 有限群上の関数の性質検査

有限体上の性質に関する性質検査の研究は、定性的には(1)と(2)でほぼ終了したと言える。そこで有限体の次に自然な代数構造と言える有限群上の関数の性質検査について研究を行った[大野-吉田, Random Structures and Algorithms' 16]。具体的には、準同型性、既約指標の定数倍かどうか、またある固定された行列とユニタリ同型かどうかの三種類の性質が定数クエリで検査可能であることを示した。有限体ではなく有限群を扱う為に、表現論を用いたフーリエ解析を導入する必要がある。

有限体の時とは異なり、有限群上の性質で定数クエリ検査可能なものの特徴付けは完了していない。その様な特徴付けを得るためには、有限群に対する高階フーリエ解析を構築する必要があると思われる。

## (4) 制約充足問題に対する割当の充足性検査

充足可能な制約充足問題の構造を明らかにするために、充足可能な入力に対する変数割当が充足解かどうかの検査について研究を行った。ここでは充足可能な制約充足問題が明示的に与えられ、それに対する変数割当がオラクルにより与えられる。つまり変数を指定

すると、その値が返される。この問題の目的はその変数割当が充足解かそれにはほど遠いかを少ない回数のクエリで検査することである。

上記の問題に対して重要な問いは「どのような CSP であれば定数クエリで検査可能かを明らかにすること」である。例えば二彩色問題に対する割当の充足性は定数クエリで検査可能であり、三彩色問題に対するそれは定数クエリでは検査不能であることが知られている。[Chen-Valeriotte-吉田, FOCS' 16]では、この問いを解決し、定数クエリで割当の充足性が定数クエリで検査可能な CSP を特徴付けることに成功した。具体的には制約充足問題が算術的、すなわち合同関係のある種の一般化の時のみ定数クエリで検査可能であり、そうでなければ定数クエリでは検査不能であることを示した。この結果により既存の多くの結果が統合された。

上記の結果を得る為に、普遍代数と呼ばれる数学的道具を用いて解析を行った。

以上に紹介したように本研究では様々な一般的な定理を得ることに成功した。加えて重要なこととして、様々な数学の理論、具体的には高階フーリエ解析、表現論、普遍代数、と性質検査を結びつけたことがある。その結果、これらの理論自体の拡張に貢献をすることもできた。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 27 件)

1. Yuichi Yoshida, Almost linear-time algorithms for adaptive betweenness centrality using hypergraph sketches, Proceedings of the 20<sup>th</sup> ACM SIGKDD Conference on Knowledge Discovery and Data Mining (KDD), 査読有, 2014, pp. 1416-1425  
DOI: 10.1145/2623330.2623626

2. Hiro Ito and Yuichi Yoshida, Testing Outerplanarity of Bounded Degree Graphs, Algorithmica, 査読有, 73(1), pp. 1-20, 2015  
DOI: 10.1007/s00453-014-9897-1

3. Daisuke Hatano and Yuichi Yoshida, Distributed Multiplicative Weights Methods for DCOP, Proceeding of the 29<sup>th</sup> AAAI Conference on Artificial Intelligence (AAAI), 査読有, 2015, pp. 2074-2080  
DOI: なし

4. Takuya Akiba, Takanori Hayashi, Nozomi Mori, Yoichi Iwata, and Yuichi Yoshida,

- Efficient Top-k Shortest-Path Distance Queries on Large Networks by Pruned Landmark Labeling, Proceeding of the 29<sup>th</sup> AAAI Conference on Artificial Intelligence (AAAI), 査読有, 2015, pp. 2-8  
DOI: なし
5. Danushka Bollegala, Takanori Maehara, Yuichi Yoshida, and Ken-ichi Kawarabayashi, Learning Word Representations from Relational Graphs, Proceeding of the 29<sup>th</sup> AAAI Conference on Artificial Intelligence (AAAI), 査読有, 2015, pp.2146-2152  
DOI: なし
6. Yoichi Iwata and Yuichi Yoshida, On the Equivalence among Problems of Bounded Width, Proceedings of the 23<sup>rd</sup> Annual European Symposium on Algorithms (ESA), 査読有, 2015, pp.754-765  
DOI: 10.1007/978-3-662-48350-3\_63
7. Takanori Hayashi, Takuya Akiba, and Yuichi Yoshida, Fully Dynamic Betweenness Centrality Maintenance on Massive Networks, Proceedings of the VLDB Endowment, 査読有, 9(2), 2015, pp. 48-59  
DOI: なし
8. Naoto Ohsaka and Yuichi Yoshida, Monotone k-Submodular Function Maximization with Size Constraints, Proceedings of the 29<sup>th</sup> Annual Conference on Neural Information Processing Systems (NIPS), 査読有, 2015, pp. 694-702  
DOI: なし
9. Tasuku Soma and Yuichi Yoshida, A Generalization of Submodular Cover via the Diminishing Return Property on the Integer Lattice, Proceedings of the 29<sup>th</sup> Annual Conference on Neural Information Processing Systems (NIPS), 査読有, 2015, pp. 847-855  
DOI: なし
10. Taro Takaguchi, Yosuke Yano, and Yuichi Yoshida, Coverage Centralities for Temporal Networks, The European Physical Journal B, 査読有, 2016  
DOI: 10.1140/epjb/e2016-60798-7
11. Kenta Oono and Yuichi Yoshida, Testing Properties of Functions on Finite Groups, Random Structures & Algorithms, 査読有, 49(3), 2016, pp. 579-598  
DOI: 10.1002/rsa.20639
12. 秋葉拓哉, 林孝紀, 則のぞみ, 岩田陽一, 吉田悠一, ネットワーク上の頂点間特徴量としての Top-k 距離とその高速なクエリ反応, 人口知能学会論文誌, 査読有, 31(2), 2016, pp. B-F71\_1-12  
DOI: 10.1527/tjsai.B-F71
13. Satoru Iwata, Shin-ichi Tanigawa, and Yuichi Yoshida, Improved Approximation Algorithms for k-Submodular Function Maximization, Proceedings of the 27<sup>th</sup> Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA), 査読有, 2016, pp. 404-413  
DOI: 10.1137/1.9781611974331.ch30
14. Yuichi Yoshida, Gowers Norm, Function Limits, and Parameter Estimation, Proceedings of the 27<sup>th</sup> Annual ACM-SIAM Symposium Discrete Algorithms (SODA), 査読有, 2016, pp. 1391-1406  
DOI: 10.1137/1.9781611974331.ch96
15. Yuichi Yoshida, Nonlinear Laplacian for Digraphs and its Applications to Network Analysis, Proceedings of the 9<sup>th</sup> International Conference on Web Search and Data Mining (WSDM), 査読有, 2016, pp. 483-492  
DOI: 10.1145/2835776.2835785
16. Tasuku Soma and Yuichi Yoshida, Maximizing Monotone Submodular Functions over the Integer Lattice, Proceedings of the 18<sup>th</sup> Conference on Integer Programming and Combinatorial Optimization (IPCO), 査読有, 2016, pp. 325-336  
DOI: 10.1007/978-3-319-33461-5\_27
17. Takanori Hayashi, Takuya Akiba, and Yuichi Yoshida, Efficient Algorithms for Spanning Tree Centrality, Proceedings of the 25<sup>th</sup> International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI), 査読有, 2016, pp. 3733-3739  
DOI: なし
18. Naoto Ohsaka, Takuya Akiba, Yuichi Yoshida, and Ken-ichi Kawarabayashi, Dynamic Influence Analysis in Evolving Networks, Proceedings of the VLDB Endowment, 査読有, 9(12), 2016, pp. 1077-1088  
DOI: なし
19. Yoichi Iwata, Magnus Wahlstrom, and Yuichi Yoshida, Half-integrality, LP-branching and FPT Algorithms, SIAM Journal on Computing, 査読有, 45(4), 2016, pp. 1377-1411

DOI: 10.1137/140962838

20. Hubie Chen, Matt Valeriote, and Yuichi Yoshida, Testing Assignments to Constraint Satisfaction Problems, Proceedings of the 57<sup>th</sup> Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS), 査読有, 2016, pp. 525-534  
DOI: 10.1109/FOCS.2016.63

21. Kohei Hayasi and Yuichi Yoshida, Minimizing Quadratic Functions in Constant Time, Proceedings of the 30<sup>th</sup> Annual Conference on Neural Information Processing Systems (NIPS), 査読有, 2016, pp. 2217-2225  
DOI: なし

22. Wataru Inariba, Takuya Akiba, and Yuichi Yoshida, Random-Radius Ball Method for Estimating Closeness Centrality, Proceedings of the 31<sup>st</sup> AAAI Conference on Artificial Intelligence (AAAI), 査読有, 2017, pp. 125-131  
DOI: なし

23. Daisuke Hatano and Yuichi Yoshida, Computing Least Cores of Supermodular Cooperative Games, Proceedings of the 31<sup>st</sup> AAAI Conference on Artificial Intelligence (AAAI), 査読有, 2017, pp. 551-557  
DOI: なし

24. Tasuku Soma and Yuichi Yoshida, Non-monotone DR-Submodular Function Maximization, Proceedings of the 31<sup>st</sup> AAAI Conference on Artificial Intelligence (AAAI), 査読有, 2017, pp. 898-904  
DOI: なし

25. Tasuku Soma and Yuichi Yoshida, Regret Ratio Minimization in Multi-objective Submodular Function Maximization, Proceedings of the 31<sup>st</sup> AAAI Conference on Artificial Intelligence (AAAI), 査読有, 2017, pp. 905-911  
DOI: なし

26. Naoto Ohsaka and Yuichi Yoshida, Portfolio Optimization for Influence Spread, Proceedings of the 26<sup>th</sup> International World Wide Web Conference (WWW), 査読有, 2017, pp. 977-985  
DOI: 10.1145/3038912.3052628

27. Lucien Valstar, George Fletcher, and Yuichi Yoshida, Landmark indexing for Evaluation of Label-Constrained Reachability Queries, Proceedings of the

ACM SIGMOD International Conference on Management of Data (SIGMOD), 査読有, 2017, pp. 345-358  
DOI: なし

[学会発表] (計 4 件)

1. Yuichi Yoshida, Half-Integrality, LP-Branching, and FPT Algorithms, Dagstuhl Seminar 15301, 2015/7/23, Dagstuhl (Germany)

2. Yuichi Yoshida, Higher-Order Fourier Analysis: Application to Algebraic Property Testing, Theory Day in Taiwan, 2016/5/17, 国立清華大学 (台湾)

3. Yuichi Yoshida, Higher-Order Fourier Analysis: Application to Algebraic Property Testing, CCC Satellite Tokyo Workshop, 2016/5/28, 東京

4. 吉田悠一, 機械学習における定数時間アルゴリズム、第28回IBISML研究会, 2017/3/6, 東京

[図書] (計 0 件)

[産業財産権]

○出願状況 (計 0 件)

○取得状況 (計 0 件)

[その他]

ホームページ等

## 6. 研究組織

(1) 研究代表者

吉田 悠一 (YOSHIDA, Yuichi)

国立情報学研究所・情報学プリンシプル研究系・准教授

研究者番号: 50636967