

平成 30 年 6 月 11 日現在

機関番号：14301

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2014～2017

課題番号：26730012

研究課題名(和文)非線形2次錐計画問題と非線形半正定値計画問題の方法と応用

研究課題名(英文)Methods and applications for nonlinear second-order cone and semidefinite programming problems

研究代表者

福田 秀美(Fukuda, Hidemi)

京都大学・情報学研究科・助教

研究者番号：40726361

交付決定額(研究期間全体):(直接経費) 2,900,000円

研究成果の概要(和文):本研究では錐計画問題,特に非線形計画問題(NLP),非線形2次錐計画問題(SOCP)および非線形半正定値計画問題(SDP)に対する新たな手法の理論解析,アルゴリズム設計および数値実験を行った.まず,NLP・SOCP・SDPに対して,正確なペナルティ法と2乗スラック変数法に関する良好な結果を得た.さらに,より一般的な対称錐を用いた錐計画問題についても,2乗スラック変数法に関する成果が得られた.その後,SOCP・SDPに対して正確なペナルティ法と関連する正確な拡張ラグランジュ法という解法を提案し,一般の錐計画問題に対するDC法も開発した.また,これらに関する多目的最適化問題に関する研究も実施した.

研究成果の概要(英文):In this project, we considered methods for conic optimization problems, in particular, nonlinear programming (NLP), nonlinear second-order cone programming (SOCP), and nonlinear semidefinite programming (SDP). We first focused in two methods: differentiable exact penalty functions, and squared slack variables techniques. For both methods, the theoretical analysis, implementations and numerical experiments were successfully done using NLP, SOCP and SDP. For the slack variables technique, we also obtained results for more general symmetric conic problems. We further proposed a method called exact augmented Lagrangian for SOCP and SDP, which has some similarities with the exact penalty method. Moreover, we proposed a new DC method for general conic optimization problems. All the methods proposed and analyzed so far replace difficult conic problems with easier problems, that are well-understood by the community. Related to these, we also studied some methods for multiobjective problems.

研究分野:連続最適化

キーワード:非線形2次錐計画問題 非線形半正定値計画問題 錐計画問題 2乗スラック変数 ペナルティ法

1. 研究開始当初の背景

(1) 非線形 2 次錐計画問題(SOCP)に対して、微分可能かつ正確なペナルティ関数と呼ばれる関数を用いて新たな手法を開発した。研究代表者は提案手法に対して、数少ない既存の手法と比較し、弱い仮定の下での速い収束性を証明した。本研究成果は 2012 年に掲載された(引用文献)。この論文を参考にして、別の研究者が非線形半正定値計画問題(SDP)に対する手法へと拡張した(引用文献)。

(2) 非線形 SOCP に対して、2 乗スラック変数法という手法を提案した。再定式化した問題は単に非線形計画問題(NLP)になることに着目し、後者の NLP と元の非線形 SOCP の理論的な関係を明らかにした。しかし、本研究開始までは理論解析のみだった。

2. 研究の目的

錐最適化問題の中で良く用いられている非線形計画問題(NLP)、非線形 2 次錐計画問題(SOCP)および非線形半正定値計画問題(SDP)に対して、研究代表者は以下の 2 つの手法に着目した。

(1) 微分可能かつ正確なペナルティ法は NLP に対して 1970 年代から研究されているが、SOCP や SDP は前回述べた引用文献とが始まりだと思われる。しかし、表 1 が示すように、SDP に対してはアルゴリズム設計がなされていなかったため、当該内容を 1 つの研究目的としていた。

表 1. 正確なペナルティ法に対して、研究開始当初に既に研究成果が得られていた内容

	NLP	SOCP	SDP
理論解析	✓	✓	✓
アルゴリズム設計	✓	✓	

(2) 2 乗スラック変数法については、表 2 の通り、SOCP に対する理論解析のみが行われていたため、記号✓が無い内容すべてを研究目的とした。具体的には、NLP と SDP に関する理論解析と、SOCP も含む 3 つの問題に対するアルゴリズム設計である。

表 2. 2 乗スラック変数法に対して、研究開始当初に既に研究成果が得られていた内容

	NLP	SOCP	SDP
理論解析		✓	
アルゴリズム設計			

(3) 上記以外に、錐最適化問題に対する様々な関連内容の実施を想定していた。具体的には、2 乗スラック変数法および正確なペナルティ法の現実問題への応用、他のペナルティ型手法の開発、不確実性を考慮した問題や目的が複数あるような多目的最適化問題に関わ

る研究などを挙げていた。

3. 研究の方法

研究代表者が所属している教員や学生以外に、海外および国内の他大学の研究者の協力を得て、研究を実施した。理論解析に関しては、対象分野の専門知識を高めるため、様々な文献を講読した。また、アルゴリズム設計を行う際には、プログラミング言語 Python とその数値ライブラリ Scipy、もしくは MATLAB を利用した。さらに、精度の良い高速なアルゴリズムを構築するため、既存のアルゴリズムと比較を行った。ただし、比較をする際には、既存のアルゴリズムの詳細を知ることが重要であるため、オープンソースを用いる手法なるべく選択した。

4. 研究成果

(1) 非線形 SOCP に対する 2 乗スラック変数法の理論解析は研究代表者が既に行っていたが、その後 2014 年に、同内容がより分かりやすい形で国内の学会雑誌の記事に出版された(雑誌論文)。さらに、そのアルゴリズムを設計し、特に 2 乗スラック変数法を用いることで、複雑な非線形 SOCP が良く知られており開発の進んでいる NLP に再定式化され、その結果、汎用の NLP ソルバーで解くことができた。2 乗スラック変数法は一般のユーザーに使いやすいという利点があり、さらに数値実験ではほぼ全ての対象問題で解が得られることが確認できた。既に研究代表者が実施していた理論解析も含め、アルゴリズム設計および数値実験を加えた論文が 2016 年に国際ジャーナルに出版された(雑誌論文)。

(2) NLP に対して 2 乗スラック変数法の理論解析を実施した。NLP は非線形 SOCP の特別な場合とみなせる。しかし、非線形 SOCP での理論解析手法がそのまま NLP に適用できず、NLP 特有の仮定が必要となる。また、NLP は非線形 SOCP より一般に知られているため、理論解析は教育的観点から重要だと考えた。したがって、本内容をまとめ、当該論文が 2016 年に国内の学会が出版している国際ジャーナルに掲載された(雑誌論文)。

(3) 非線形 SDP に対して 2 乗スラック変数法の理論解析を行った。NLP や SOCP と同様に、最適性の必要条件と 2 乗スラック変数を用いて再定式化された問題の最適性の必要条件の等価性を示し、制約想定との関連性を明らかにした。ただし、ここでは、2 乗スラック変数は 2 次の十分条件を導くための道具として用いた。非線形 SDP に対する 2 次の十分条件は既に知られていたが、2 乗スラック変数を適用することで、その導出が容易になった。以上の内容は、2018 年に本研究分野で最も権威のある論文誌の一つである国際ジャーナル

に出版された(雑誌論文)。

(4) NLP・SOCP・SDPを拡張した非線形対称錐計画問題(SCP)という問題に対して、2乗スラック変数法の理論解析を行った。その際、ジョルダン代数という計算の枠組みを用いることで、NLP・SOCP・SDPに対する既存研究と同様の結果が得られた。また、SCPに対する拡張ラグランジュ法の収束定理が、2乗スラック変数の結果とNLPに対する拡張ラグランジュ法の収束定理から導かれることを示した。当該論文では、2乗スラック変数を用いることで、2次の最適性条件と一般の錐最適化問題に対する拡張ラグランジュ法の収束結果が容易に得られることを示した。これらの結果をまとめた論文は、2018年にオペレーションズ・リサーチ分野で最も権威のある論文誌の一つである国際ジャーナルに受理された(雑誌論文)。

(5) 正確なペナルティ法と同様のアプローチである正確な拡張ラグランジュ法と呼ばれる解法の研究を行った。正確な拡張ラグランジュ法は、ラグランジュ乗数と呼ばれる変数を考慮した正確な拡張ラグランジュ関数を用いる点が正確なペナルティ法と異なる。正確な拡張ラグランジュ関数は、変数が増えることで複雑になる一方、正確なペナルティ法が必要とする部分問題が不要となる。したがって、より多くの最適化問題が効率よく解けることが期待される。この研究内容では、複雑な制約を持つSOCP・SDP問題を無制約最適化問題に再定式化するための関数(正確な拡張ラグランジュ関数)を提案し、理論解析、アルゴリズム設計および数値実験を行った。SOCPに対しては、研究代表者の研究室に所属していた学生との共同研究により、修士論文としてまとめた(引用文献)。また、SDPに関しては、正確な拡張ラグランジュ関数の一般化を考えて解析し、それらの結果をまとめた論文は投稿中である。

(6) 一般の錐最適化問題に対する新しい手法を提案した。正則化パラメータと、DC分解とよばれる凸関数を用いた関数の分解方法を反復ごとに変えることで、双線形行列不等式制約を含む問題などの最適化問題に対して、より良い解が得られることを確認した。収束に関する定理も一般の錐最適化問題に対して証明し、NLP・SOCP・SDPについて数値実験を行った。本内容はこれまでに無い新しいDC法であるため、結果をまとめ、論文として現在執筆中である。

(7) その他の内容として、多目的最適化問題に対する降下法に注目した。まず、一般の制約条件をもつ問題が扱える外点ペナルティ法およびバリア型(内点ペナルティ法)の手法を提案し、理論解析も行った。このような一般的な制約を扱う多目的最適化問題に対する降

下法は、本内容が初めてだと思われる。外点ペナルティ法に関する論文は、2016年に国際ジャーナルに出版された(雑誌論文)。一方、バリア型の手法をまとめた論文は投稿中である。さらに、非単調直線探索を用いる降下法(最急降下法およびニュートン法)が多目的の場合にも実用的であることを示した。これは、既存のアルゴリズムの効率化につながる結果である。また、多目的な問題に対する近接勾配法を提案し、その応用として、実世界では必ず存在する不確実性を考慮した最適化問題に適用した。それらの結果も現在執筆中である。さらに、多目的最適化問題に対する降下法に関して、査読付きサーベイ論文や国内の2つの学会誌に解説記事を執筆し、その1つは2018年に既に出版され、もう1つも2018年度に出版される予定である。

以上の研究成果を表3にまとめた。ただし、多目的最適化問題に対する内容(上記の(7))は書かれておらず、錐最適化問題に直接関わるもののみ((1)-(6))を示した。また、記号*は研究開始当初に既に得られていた内容であり、記号✓は理論解析とアルゴリズム設計の両方を含むことを表している。さらに、一般の錐計画問題に対して、正確なペナルティ法および正確な拡張ラグランジュ法が研究されていない理由は、既存の研究成果だけでは、技術的に不十分だからである。よって、一般の錐に関しては、まず様々な最適性条件に関する定理などの開発が肝要である。

表3. 研究成果が得られた内容

	NLP	SOCP	SDP	一般
正確なペナルティ法	✓*	✓*	✓*	
2乗スラック変数法	✓	✓	✓	✓
正確な拡張ラグランジュ法	✓*	✓	✓	
新しいDC法	✓	✓	✓	✓

<引用文献>

Ellen H. Fukuda, Paulo J. S. Silva, Masao Fukushima, Differentiable exact penalty functions for nonlinear second-order cone programs, *SIAM Journal on Optimization*, Vol. 22, No. 4, 2012, pp. 1607-1633.

Le Han, The differentiable exact penalty function for nonlinear semidefinite programming, *Pacific Journal of Optimization*, Vol. 10, No. 2, 2014, pp. 285-303.

Akiko Kobayashi, Differentiable exact augmented Lagrangian functions for nonlinear second-order cone programs, *Kyoto University*, master thesis, 2018.

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計9件)

福田エレン秀美, 多目的最適化問題に対する降下法 単一目的最適化アルゴリズムの拡張, システム/制御/情報, 査読無, 出版予定, 2018.

福田エレン秀美, 多目的最適化問題: 降下法の基礎, 日本オペレーションズ・リサーチ学会, 特集「RAMP シンポジウム」, 査読無, Vol. 63, 2018, pp. 46-152.

Bruno F. Lourenço, Ellen H. Fukuda, Masao Fukushima, Optimality conditions for problems over symmetric cones and a simple augmented Lagrangian method, *Mathematics of Operations Research*, 査読有, 出版予定, 2018.

Bruno F. Lourenço, Ellen H. Fukuda, Masao Fukushima, Optimality conditions for nonlinear semidefinite programming via squared slack variables, *Mathematical Programming*, 査読有, Vol. 168, No. 1-2, 2018, pp. 177-200.

Ellen H. Fukuda, Masao Fukushima, A note on the squared slack variables technique for nonlinear optimization, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, 査読有, Vol. 60, No. 3, 2017, pp. 262-270.

Ellen H. Fukuda, Masao Fukushima, The use of squared slack variables in nonlinear second-order cone programming, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 査読有, Vol. 170, No. 2, 2016, pp. 394-418.

Ellen H. Fukuda, Luis M. Graña Drummond and Fernanda M. P. Raupp, An external penalty-type method for multicriteria, *TOP*, 査読有, Vol. 24, No. 2, 2016, pp. 493-513.

福田エレン秀美, 福島雅夫, 2次錐計画と2乗スラック変数法, 日本オペレーションズ・リサーチ, 特集「2次錐計画の波に乗れ」, 査読無, Vol. 59, 2014, pp. 707-715.

Ellen H. Fukuda, Luis M. Graña Drummond, A survey on multiobjective descent methods, *Pesquisa Operacional*, 査読有, Vol. 34, No. 3, 2014, pp. 585-620.

[学会発表](計20件)

田辺広樹, 福田エレン秀美, 山下信雄, 多目的最適化問題における近接勾配法とその応用, 研究集会「最適化: モデリングとアルゴリズム」, 2018/03/29, 政策研究大学院大学(東京都).

福田エレン秀美, 多目的最適化問題に対する降下法, 第29回 RAMP シンポジウム, 2017/10/13, 筑波大学(茨城県).

三田佳那子, 福田エレン秀美, 山下信雄, 多目的最適化問題に対する非単調直線探索を用いた降下法とその大域的収束性, 日本オペレーションズ・リサーチ学会 2017年秋季研究発

表会, 2017/09/15, 関西大学(大阪府).

磯西市路, 福田エレン秀美, 山下信雄, 非線形錐計画問題に対する新しい DC 法とその収束性, 日本オペレーションズ・リサーチ学会 2017年秋季研究発表会, 2017/09/15, 関西大学(大阪府).

Ellen H. Fukuda, Bruno F. Lourenço, On the construction of exact augmented Lagrangian functions for nonlinear semidefinite optimization, SIAM Conference on Optimization, 2017/05/24, バンクーバー(カナダ).

三田佳那子, 福田エレン秀美, 山下信雄, 多目的最適化問題に対する非単調直線探索を用いた最急降下法, 第61回システム制御情報学会研究発表講演会, 2017/05/23, 京都テルサ(京都府).

磯西市路, 福田エレン秀美, 山下信雄, BMI 制約付き最適化問題に対する新しい DC 法, 第61回システム制御情報学会研究発表講演会, 2017/05/23, 京都テルサ(京都府).

小林秋子, 福田エレン秀美, 非線形2次錐計画問題に対する正確な拡張ラグランジュ関数, 日本オペレーションズ・リサーチ学会関西支部若手研究発表会, 2016/10/29, 関西大学(大阪府).

飯塚拓矢, 福田エレン秀美, 山下信雄, 非線形 SOCP に対する安定化逐次二次計画法とその超一次収束性について, 日本オペレーションズ・リサーチ学会 2016年秋季研究発表会, 2016/09/16, 山形大学(山形県).

小林秋子, 福田エレン秀美, 非線形2次錐計画問題に対する正確な拡張ラグランジュ関数, 日本オペレーションズ・リサーチ学会 2016年秋季研究発表会, 2016/09/15, 山形大学(山形県).

Ellen H. Fukuda, Bruno F. Lourenço, Constructing exact augmented Lagrangian functions for nonlinear semidefinite programming problems, RIMS Workshop: The State-of-the-Art Optimization Technique and Future Development, 2016/08/26, 京都大学(京都府).

Ellen H. Fukuda, Bruno F. Lourenço, Masao Fukushima, Second-order conditions for nonlinear semidefinite optimization problems via slack variables approach, The Fifth International Conference on Continuous Optimization, 2016/08/08, 政策研究大学院大学(東京都).

福田エレン秀美, 最適化問題に対する正確なペナルティ関数, 日本オペレーションズ・リサーチ学会「最適化の基盤とフロンティア」研究部会, 2016/03/19, 慶応大学(神奈川県).

福田エレン秀美, 非線形計画問題, 2次錐計画問題と多目的最適化問題における研究, 日本オペレーションズ・リサーチ学会 - 関西支部記念講演会, 2016/03/05, 関西学院大学(大阪府).

福田エレン秀美, ロウレンソ・F・ブルノ, 2乗スラック変数を用いた非線形半正定値計画問題の再定式化, 日本オペレーションズ・

リサーチ学会 2015 年秋季研究発表会，
2015/09/11，九州工業大学（福岡県）。

露口大介，福田エレン秀美，胡明，福島雅夫，平滑化法を用いたマルチリーダーフォロワーゲームの解法，日本オペレーションズ・リサーチ学会 2015 年秋季研究発表会，
2015/09/10，九州工業大学（福岡県）。

福田エレン秀美，ロウレンソ・F・ブルノ，福島雅夫，非線形半正定値計画問題と 2 乗スラック変数法，RIMS 研究集会「新時代を担う最適化：モデル化手法と数値計算」，
2015/09/01，京都大学（京都府）。

露口大介，福田エレン秀美，胡明，福島雅夫，マルチリーダーフォロワーゲームの滑らかなナッシュ均衡問題への再定式化について，RIMS 研究集会「新時代を担う最適化：モデル化手法と数値計算」，2015/09/01，京都大学（京都府）。

Ellen H. Fukuda, Bruno F. Lourenço and Masao Fukushima, Studies on squared slack variables for nonlinear second-order cone and semidefinite programming, 22nd International Symposium on Mathematical Programming, 2015/07/14, ピッツバーグ（アメリカ）。

Masao Fukushima, Ellen H. Fukuda, Squared slack variables in nonlinear second-order cone programming, International Conference on Variational Analysis, Optimization and Quantitative Finance (Terry Fest), 2015/05/19, リモージュ（フランス）。

〔図書〕（計 0 件）

〔産業財産権〕

出願状況（計 0 件）

取得状況（計 0 件）

〔その他〕

ホームページ等：なし

6．研究組織

(1) 研究代表者

福田 秀美（FUKUDA, Hidemi）
京都大学・大学院情報学研究科・助教
研究者番号：4 0 7 2 6 3 6 1

(2) 研究分担者：なし

(3) 連携研究者：なし

(4) 研究協力者（国内のみ）

福島雅夫（FUKUSHIMA, Masao）
山下信雄（YAMASHITA, Nobuo）
ロウレンソ・ブルノ（LOURENÇO, Bruno F.）
胡明（HU, Ming）