様　式　C－１９、F－１９－１、Z－１９　(共通)

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ３０ 年　 ５ 月 ３１ 日現在

機関番号：３２６６０
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2014～2017
課題番号：２６７８０１９３

研究課題名（和文）タイミングリスクの漸近的静的ヘッジ

研究課題名（英文）Asymptotic static hedging of a timing risk

研究代表者
今村　悠里（Imamura, Yuri）

東京理科大学・経営学部ビジネスエコノミクス学科・助教

研究者番号：４０６３３１９４

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,900,000円

研究成果の概要（和文）：行使期日や配当日，満期日が将来の不確実な時間である金融商品の売却者および保有者は支払いが行われる時間が現在わからないというリスク（タイミングリスク）を持っている．一方，支払い時間が固定されている，つまりいつ支払いが起こるかという時間が事前にわかっている商品はタイミングリスクを持っていない．
本研究では確率微分方程式の解として価格過程が与えられるとき，タイミングリスクを持つ商品の価値と，タイミングリスクを持たない商品のポートフォリオの価値が近いものを求め，この近似ポートフォリオがタイミングリスクを持つ商品の価値に限りなく近くなることを示した．

研究成果の概要（英文）：Timing risk is an uncertainty associated to the instant at which the payoff payment of derivative is executed.This project proposes a methodology to hedge it via static positions in derivatives without timing risk (plain vanilla options) under a multi-dimensional diffusion model of underlying price dynamics.
We gave a decomposition of a generalized timing risk into an integral of knock-in options, by considering not only first order hedges but also higher orders (asymptotic expansion) and the related convergence results.

研究分野：数理ファイナンス

キーワード：タイミングリスク　静的ヘッジ　バリアーオプション　Ｐｕｔ－Ｃａｌｌ対称化　漸近展開　拡散過程　確率微分方程式　parametrix

１．研究開始当初の背景

ある配当が支払われる時間が不確実であることによるリスクのことをタイミングリスクという．一方，行使期日や配当日，満期日が固定されている金融商品はタイミングリスクを持っていない．このようなタイミングリスクを持たない金融商品をヨーロピアン型と呼ぶ．

Carr 氏と Picron 氏は，において，固定金額が支払われるリスクのみをタイミングリスクと呼び，それに対して静的ヘッジが，そのリスクの満期までのあらゆる時点の満期のプレーンバニラオプションをもつことで可能になることをブラックショールズモデルの仮定の下で示した．これは「連続無限種類のオプションを無限小個」持つという数学上のトリックであるが，実務上は，これをリーマン和で近似することになる．Carr 氏と Picron 氏によるタイミングリスクの静的ヘッジにおいては，次の２つが本質的な役割を果たしている：1. タイミングリスクはあらゆる時点の満期のバリアーオプションを無限小個持つことで静的ヘッジ可能である，2. バリアーオプションはプレーンバニラオプションによって静的ヘッジすることが可能である．役割 2.は一般の拡散過程モデルにはないブラックショールズモデル特有の性質であるため，モデルの一般化には別の解決策が必要とされていた．

２．研究の目的

拡散過程モデルの下で「タイミング」がその拡散過程の到達時刻で与えられる場合に，そのタイミングリスクの漸近的な静的ヘッジ公式を考えたとき，バリアーオプションはブラックショールズモデルの下では静的ヘッジ可能であるが，一般の拡散過程は先行研究で用いた性質を持たないため静的ヘッジ可能性は期待できず，タイミングリスクの静的ヘッジを得ることは難しい．

本研究では微分方程式の基本解の古典的な構成方法である parametrix の手法を用いて，任意の高次元拡散過程を幾何ブラウン運動で逐次近似する展開式を導出し，それを用いてタイミングリスクの漸近的な静的ヘッジ公式とそのエラー評価を導くことを試みる．

３．研究の方法

今回提案する静的ヘッジの漸近的な近似は微分方程式の基本解の古典的な構成方法である parametrix の手法を用いている．通常は基本解を表す級数が収束するためには係数に関する連続性が必要である．しかし本研究では，不連続性を避けることができない．Parametrix を使うときに，拡散過程の係数の不連続性がどこまで許されるかを検討する．

先行研究では専らブラックショールズモデルを扱ってきた．ブラックショールズモデルは原資産のボラティリティ（変化率の分散）は，時間や原資産価格の変動に影響されないと仮定している．しかしこの仮定は，実際の市場の動きを説明できないことが知られている．その問題を回避するためには，原資産価格のボラティリティー自身が拡散過程になるという「確率的ボラティリティモデル」が有効であるとされている．本研究では，確率的ボラティリティモデルに適用可能な条件を考察する．

拡散過程モデルにおける漸近的なタイミングリスクの静的ヘッジは実用上はリーマン和で積分を近似するポートフォリオを構成することによって得られる．そこで数値計算によって近似値を計算すし，本研究で得られた静的ヘッジ手法の有用性の検証を行う．

４．研究成果

支払のタイミングを決める価格過程の到達点において，一般の拡散過程モデルを局所的にブラックショールズモデルに還元することが対称化（Put - Call 対称化）を用いてバリアーオプションをプレーンバニラオプションによってヘッジすることによって可能になる．このとき，大域的にはブラックショールズモデルと違うことによる（１次の）ヘッジエラーが生じる．１次のヘッジエラーに対してもう一度この手法を適応すると，展開式の誤差は２次のエラーとなる．この方法を繰り返し行うことにより，高次のエラーを持つ近似的な漸近静的ヘッジ公式を得る．無限回，つまり限りなくこの方法を多く適応したとき，エラーが０に収束するためには，通常拡散過程の係数に対してある種の「ヘルダー連続性」の仮定が必要であるが，それなしでも収束するという結果を得た．

今回提案した Put - Call 対称化を用いた漸近的静的ヘッジ公式の有用性を示すため，ヘッジエラーが具体的に計算可能なブラックショールズモデルを用いて数値計算を行った．ブラックショールズモデルにおける価格過程はドリフト項付きブラウン運動を指数に乗せたものである．Put - Call 対称化としてドリフト付きブラウン運動をドリフトなしのブラウン運動と見なすとき，バリアー境界におけるブランウ運動の直行変換を用いた．次に与える FIG.1 は１次のヘッジエラー，FIG.2 は２次のヘッジエラーの数値計算結果である．

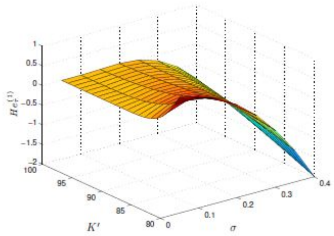

Fig. 1. **First order hedging error.** *The plot reports the first order hedging error given in Equation (4.5) as function of two variables: i) the strike of the hedging option, i.e.* $K' \in [80, 100]$, *ii) the diffusion coefficient of the underlying dynamics, i.e.* $\sigma \in [0.05, 0.4]$. *Base case parameters' values:* $K = 80, r = 0.03, T = 1, \tau = 0.6$.

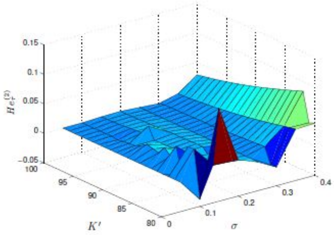

Fig. 2. **Second order hedging error.** *The plot reports the second order hedging error given in Equation (4.6) as function of two variables: i) the strike of the hedging option, i.e.* $K' \in [80, 100]$, *ii) the diffusion coefficient of the underlying dynamics, i.e.* $\sigma \in [0.05, 0.4]$. *Base case parameters' values:* $K = 80, r = 0.03, T = 1, \tau = 0.6$.

FIG.1 の結果より，ボラティリティーσが大きい場合において，１次のヘッジエラーは増大している．反して FIG.２よりボラティリティーσが大きい場合，１次のヘッジエラーよりも２次のヘッジエラーのほうが絶対値が小さくなることがわかった．

我々が得た結果でも，エラーが限りなく小さく収束するためには拡散過程の係数に対して楕円性が必要であるが，確率的ボラティリティモデルとして知られているモデルの多くは楕円性を持ち得ない．そこで，状半平面上のブラウン運動の対称性を用いる研究をおこなった．

Put-Call 対称化で扱われた対称性はブラウン運動が超平面に対する対称性に関して分布不変であることから得られる．確率的ボラティリティモデルのひとつである SABR モデルは双曲ブラウン運動に還元されるが，双曲ブラウン運動は一次分数変換に対して分布不変である．よって，Put-Call 対称化を一次分数変換に対して考えることができる．この手法で parametrix による漸近公式を得ることに成功した．この結果は井田有紀氏との共同研究として雑誌論文①として掲載された．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計１件）
①井田有紀、今村悠里、Towards the exact simulation using hyperbolic Brownian motion、Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics、Vol. 34、No. 3、2017、pp. 833–843

〔学会発表〕（計１１件）
①今村悠里、An Asymptotic Static Hedge of a Timing Risk、International Workshop on Risk Analysis, Ruin and Extremes、2014

②今村悠里、An Asymptotic Static Hedge of a Timing Risk、International Workshop on Risk Analysis, Ruin and Extremes、2014

③今村悠里、An Asymptotic Static Hedge of a Timing Risk、The Quantitative Methods in Finance 2014 Conference、2014

④今村悠里、An Asymptotic Static Hedge of a Timing Risk、Probability Seminar、2014

⑤今村悠里、A New Numerical Scheme for the Price of Barrier Options Based on a Symmetrization of Diffusion Processes、Columbia-JAFEE Conference 2015、 2015

⑥今村悠里、A Numerical Scheme Based on Semi-Static Hedging Strategy、2016 年冬期 淑明女子大学校数理ファイナンスセミナー、2016

⑦今村悠里、A New Numerical Scheme for the Price of Barrier Options Based on a Symmetrization of Diffusion Processes、Workshop on SDEs and Stochastic Processes、2016

⑧今村 悠里、The Value of Timing Risk、第 45 回 2016 年度夏季 JAFEE 大会、2016

⑨今村悠里、Asymptotic Static Hedge via Symmetrization、金融工学・数理計量ファイナンスの諸問題 2016、2016

⑩井田有紀、Towards the Exact Simulation Using Hyperbolic Brownian Motion、第 46 回 2016 年度冬季 JAFEE 大会、2017

⑪ 今 村 悠 里 、 Static Hedge with a Generalized Reflection Principle、Dirichlet Forms and Stochastic Analysis、2017

〔図書〕（計０件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計０件）

○取得状況（計０件）

〔その他〕

６．研究組織
(1)研究代表者
今村　悠里　　（Imamura, Yuri）
東京理科大学・経営学部ビジネスエコノミクス学科・嘱託助教
研究者番号：26780193