

平成 29 年 5 月 11 日現在

機関番号：11301

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2014～2016

課題番号：26800001

研究課題名(和文)軌道体構成法による中心電荷24の正則頂点作用素代数の構成

研究課題名(英文)Orbifold constructions and holomorphic vertex operator algebras of central charge 24

研究代表者

島倉 裕樹(Shimakura, Hiroki)

東北大学・情報科学研究科・准教授

研究者番号：90399791

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,100,000円

研究成果の概要(和文)：頂点作用素代数における有名な未解決問題の一つに、中心電荷24の正則頂点作用素代数の分類問題がある。1993年に Schellekens によって与えられた共形重み1の空間のリー代数構造の71個の可能性のリストを基に分類する方向での研究が進んでいる。

研究開始時点では12個のリー代数に対応する正則頂点作用素代数が未構成であった。本研究では軌道体構成法を用いて、このうち6個の場合に構成した。他の研究者の成果を合わせることで、71個のリー代数の全てに対して、それを重み1の空間のリー代数として持つ中心電荷24の正則頂点作用素代数が存在することがわかった。

研究成果の概要(英文)：The classification of holomorphic vertex operator algebras of central charge 24 is one of famous problems in vertex operator algebra theory. This problem has been studied based on the list of 71 possible weight one Lie algebra structures given by Schellekens in 1993.

At the beginning of this research project, there are the remaining 12 Lie algebras in the list such that the corresponding holomorphic vertex operator algebras have not been constructed yet. The main result is to establish the 6 cases of the remaining 12 cases by using orbifold constructions. Combining the results by us and other researchers, we have proved that for any Lie algebra in Schellekens' list, there exists a holomorphic vertex operator algebra of central charge 24 with it as the weight one Lie algebra.

研究分野：頂点作用素代数

キーワード：代数学 頂点作用素代数 正則頂点作用素代数 軌道体構成法 リー代数 内部自己同型

## 1. 研究開始当初の背景

「中心電荷 24 の正則頂点作用素代数の分類」は頂点作用素代数における未解決問題の一つである。この問題は「階数 24 のユニモジュラ偶格子の分類」の頂点作用素代数における類似と考えられている。特に、類似の一つとして、重さ 1 の空間のリー代数構造から中心電荷 24 の正則頂点作用素代数構造が一意に決まると考えられている。格子の分類結果は様々な分野へ応用されていることから、頂点作用素代数の分類結果の応用も期待されている。

1993年に Schellekens が中心電荷 24 の正則頂点作用素代数の重さ 1 の空間のリー代数構造の可能性を 71 個のリストとして与えている。したがって、各々のリー代数に対して、対応する中心電荷 24 の正則頂点作用素代数を構成することが最初の問題となる。研究開始当初において、71 個の中で 59 個の場合は構成されていた。よって、残りの 12 個に対して、対応する中心電荷 24 の正則頂点作用素代数の構成が求められていた。

## 2. 研究の目的

本研究の目的は残りの 12 個のリー代数に対して、対応する中心電荷 24 の正則頂点作用素代数を、軌道体構成法を用いて構成し、中心電荷 24 の正則頂点作用素代数の分類問題における構成部分を解決する事である。特に、軌道体構成法の適用範囲を広げる研究を行い、より本質に迫る。

## 3. 研究の方法

研究開始当初において、軌道体構成法が適用されていたのは、Niemeier 格子頂点作用素代数と位数 2 または 3 の格子の自己同型の標準持ち上げのみであった。

まずは、既存の方法で可能な限りの構成を試みる。そのためには、標準持ち上げの分類が必要となる。位数 2 の場合は枠付きとなり、既に別の方法で構成済みである。そこで、Niemeier 格子の位数 3 の自己同型の標準持ち上げの分類を行い、Niemeier 格子頂点作用素代数とこれら自己同型に軌道体構成法を適用して得られる正則頂点作用素代数を全て明らかにする。

さらに、Niemeier 格子頂点作用素代数以外の一般の正則頂点作用素代数に軌道体構成法を適用し、さらなる構成を試みる。リー代数構造から得られる内部自己同型を考えると、付随する既約 twisted 加群は内部自己同型に付随する  $L_i$  のデルタ作用素を用いて構成されている。Dong-Li-Mason によるデルタ作用素を用いた単純カレント拡大の理論を適用することで、軌道体構成法が適用可能となるための内部自己同型の条件が得られる。さらに、構成した中心電荷 24 の正則頂

点作用素代数の重さ 1 の空間のリー代数構造を決定するために、次元公式やリー代数のランクに関する考察などを行う。必要に応じて、具体的なデルタ作用素の記述を用いて、リー代数の計算を直接行う。

また、リーチ格子頂点作用素代数は重さ 1 の空間に入るリー代数構造は可換であるため、今まで殆ど考察されてこなかった。そこで、リーチ格子頂点作用素代数からも軌道体構成法を用いて新しい正則頂点作用素代数の構成を試みる。特に、格子の自己同型の標準持ち上げ以外についても考察を行う。

## 4. 研究成果

- (1) 内部自己同型に付随する Z2 軌道体構成法の理論を確立し、その応用として 5 個の新しい中心電荷 24 の正則頂点作用素代数を構成した。軌道体構成法が適用可能かどうかを判定するための手段をアフィンリー代数の表現論を用いて与えたことは、今後の研究に有用である。また、リー代数構造を確定させるために、次元公式等の新しいツールを提供した。
- (2) リーチ格子頂点作用素代数に Z7 軌道体構成法を適用して新しい中心電荷 24 の正則頂点作用素代数の一つを構成した。この構成において、格子の自己同型の標準持ち上げを内部自己同型で捻った事が新しいアイデアであり、軌道体構成法の適用範囲が大きく広がった。この手法をさらに研究することで、軌道体構成法による新たな道が得られる可能性がある。また、(1)と(2)の成果と他の研究者の研究成果を合わせることで、研究の目的が達成され、71 個のリー代数に対応する中心電荷 24 の正則頂点作用素代数の構成が完了した。
- (3) Niemeier 格子頂点作用素代数に Z3 軌道体構成法を適用可能な位数 3 の格子の自己同型の標準持ち上げを分類した。この成果から、この方法では新しい正則頂点作用素代数が得られないことがわかり、他の手段の模索へ繋がった。また、格子頂点作用素代数の自己同型の共役類に関する考察を行っており、今後の研究への応用が期待される。
- (4) いくつかの頂点作用素代数に対して、S4 級となるものの分類を行った。その一つは最小共形重みが 1 の場合であり、もう一つは頂点作用素代数  $VL_+$  の場合である。これらの成果を用いることで、自己同型群以外の対称性の視点から、良い頂点作用素代数が分類できた。実際に級の高い頂点作用素代数を考察することで、他分野との関係を見出せる可能性がある。

- (5) 中心電荷 24 の正則頂点作用素代数の統一的な構成方法が G. Hoehn 氏によって提案されている。この提案をリーチ格子頂点作用素代数のある部分代数を用いて解釈し、素数位数の場合に構成と分類を行った。これは、中心電荷 24 の正則頂点作用素代数の統一的な研究に向けた一歩となる。
- (6) リーチ格子頂点作用素代数に Z3 軌道体構成法を適用してムーンシャイン頂点作用素代数が得られるという予想を証明した。実際には、モンスター単純群が作用することを極大 3 局所部分群によるモンスター単純群の特徴付けを用いて証明し、得られる頂点作用素代数がユニタリであることを単純カレント拡大と自己同型を用いて証明した。これらを含めた仮定の下で新しいムーンシャイン頂点作用素代数の特徴付けを与えることで、予想を解決した。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 7 件)

H.Y. Chen, C.H. Lam and H. Shimakura, Z3-orbifold construction of the Moonshine vertex operator algebra and some maximal 3-local subgroups of the Monster, Math. Z. 査読有, 2017 年, 印刷中,  
DOI: 10.1007/s00209-017-1878-z

C.H. Lam and H. Shimakura, Construction of Holomorphic Vertex Operator Algebras of Central Charge 24 Using the Leech Lattice and Level p Lattices, Bulletin of the Institute of Mathematics, Academia Sinica NEW SERIES, 12 (2017) 39--70, 査読無  
DOI: 10.21915/BIMAS.2017102

C.H. Lam and H. Shimakura, A holomorphic vertex operator algebra of central charge 24 whose weight one Lie algebra has type A67, Lett. Math. Phys. 106 (2016), 1575--1585. 査読有  
DOI: 10.1007/s11005-016-0883-1

T. Hashikawa and H. Shimakura, Classification of the vertex operator algebras  $VL_+$  of class  $S_4$ , J. Algebra. 456 (2016), 151--181. 査読有  
DOI: 10.1016/j.jalgebra.2016.01.035

H. Maruoka, A. Matsuo and H. Shimakura, Classification of vertex

operator algebras of class  $S_4$  with minimal conformal weight one, J. Math. Soc. Japan. 68 (2016), 1369--1388. 査読有  
DOI: 10.2969/jmsj/06841369

C.H. Lam and H. Shimakura, Orbifold construction of holomorphic vertex operator algebras associated to inner automorphisms, Comm. Math. Phys. 342 (2016), 803--841. 査読有  
DOI: 10.1007/s00220-015-2484-8

M. Ishii, D. Sagaki and H. Shimakura, Automorphisms of Niemeier lattices for Miyamoto's Z3-orbifold construction, Math. Z. 280 (2015), 55--83. 査読有  
DOI: 10.1007/s00209-015-1413-z

[学会発表](計 11 件)

H. Shimakura, On classification of holomorphic vertex operator algebras of central charge 24, Conference in Finite Groups and Vertex Algebras, Academia Sinica, Taiwan, 2016.8.25.

島倉裕樹, On classification of holomorphic vertex operator algebras of central charge 24, 第 28 回有限群論草津セミナー, 草津セミナーハウス, 2016.7.30.

H. Shimakura, On classification of vertex operator algebras of class  $S_n$ , Algebras, Groups and Geometries, 東京大学, 2016.5.7

H. Shimakura, On p-local subgroups of the automorphism groups of vertex operator algebras, Workshop on finite groups, VOA and algebraic combinatorics, Foguang University, Taiwan, 2016.3.23.

島倉裕樹, On orbifold constructions of holomorphic vertex operator algebras of central charge 24, 日本数学会 2016 年度年会, 筑波大学, 2016.3.19.

H. Shimakura, On Montague's dimension formula for orbifold construction, Vertex Operator Algebra and Related Topics, Kehua Yuan Hotel, China, 2015.9.9.

島倉裕樹, ムーンシャイン VOA のイジング元とモンスターの  $2A$  元の一対一対応について, 第 27 回有限群論草津セミナー, 草津セミナーハウス,

2015.8.2.

島倉裕樹, Classification of vertex operator algebras of class S4 with minimal conformal weight one, 第32回代数的組合せ論シンポジウム, 石川県文教会館及び金沢大学サテライト・プラザ, 2015.6.24.

H. Shimakura, On orbifold constructions associated to inner automorphisms, Taitung Workshop on finite groups, VOA and algebraic combinatorics, National Taitung University, Taiwan, 2015.3.10.

島倉裕樹, On orbifold constructions of holomorphic vertex operator algebras of central charge 24 associated to inner automorphisms, 有限群とその表現, 頂点作用素代数, 代数的組合せ論の研究, 京都大学数理解析研究所, 2014.12.16.

島倉裕樹, Classification of vertex operator algebras VL+ of class S4, 第26回有限群論草津セミナー, 草津セミナーハウス, 2014.8.2.

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

島倉 裕樹 (SHIMAKURA, Hiroki)

東北大学・大学院情報科学研究科・准教授  
研究者番号: 90399791

### (2) 研究分担者

( )

研究者番号:

### (3) 連携研究者

( )

研究者番号:

### (4) 研究協力者

Ching Hung Lam ( )

中央研究院 (台湾)・数学研究所・教授