科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２９ 年　 ６ 月　 ７ 日現在

機関番号：１２６０１

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2014～2016

課題番号：２６８０００５

研究課題名（和文）2-表現論の研究とブルエ予想への応用

研究課題名（英文）Study of 2-representations and its applications to Broue's conjecture

研究代表者

土岡　俊介（Tsuchioka, Shunsuke）

東京大学・大学院数理科学研究科・特任助教

研究者番号：００５８５０１０

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,900,000円

研究成果の概要（和文）：KOR理論のスピン類似を考察する中で得られた、奇数$p\geq 3$ごとのRogers-Ramajujan型分割定理が最大の成果である（東大数理の渡部正樹氏と共同）。$p=3$はSchurの分割定理(1926年)」として分割理論の教科書で標準的に扱われている。$p=5$はAndrewsによるRR型恒等式の3パラメータ一般化の過程で1970年代に予想されたもので、約20年後にAndrews-Bessenrodt-Olssonによって計算機を使って証明された。我々の一般化・証明は京都スクールによるperfect crystalの理論を用いるもので、分割理論に量子群の表現論から新しい知見を与えた。

研究成果の概要（英文）：In a course of a study of spin analog of K\"ulshammer-Olsson-Robinson theory (Invent.Math.,(2003)), we found and proved a new Rogers-Ramajujan type identity for each odd number $p\geq 3$ (joint work with Masaki Watanabe). When $p=3$, it is nothing but ``Schur partition theorem (1926)'' that you can find in almost all textbooks on the theory of partitions. When $p=5$, it is the same as the conjecture due to G.Andrews found in 1970s in a course of his 3 parameter generalization of the Rogers-Ramajujan identities. Andrews' conjecture was proved about 20 years later (Trans.A.M.S.,(1994)) with an aid of computers. Our generalization and proof are based on a theory of perfect crystals of Kyoto school and provides new insight into the theory of partitions (arXiv:1609.01905).

研究分野：代数学

キーワード：量子群　柏原クリスタル　アフィン・リー環　対称群　スピン表現　圏論化　ロジャーズ・ラマヌジャン恒等式　整数の分割

１．研究開始当初の背景

圏論化とは，ｎ圏Ｃから，Ｄのｎ＋１ 射を忘れることでＣが復元されるようなｎ＋１圏Ｄを構成することである．近年，圏論化はさまざまな分野で注目されており，例えばフレンケル等は，圏論化が微分構造を反映する４ 次元多様体の不変量を与えることを期待している．一方で，リー環論とは，（カッツ・ムーディー）リー環から派生した対象・理論の総称であり，リー環の数学・物理におけるユビキタスから深く研究されている．

驚くべきことに，リー環論とは一見無関係に見える対称群は圏論化を通じてリー環論と密接に関係していることが，最近明らかになり，新しい視点と応用がもたらされた．その嚆矢となったのは，クレシュチェフのモジュラー分岐則である．これは，有木による圏論化の”組合せ論的な影" とみなせる．このような圏論化はそれ自体興味深いが，対称群に関するブルエ予想（これは有限群のモジュラー表現論において導来同値を予言する有名な予想だが，ここでは紙面の都合上説明を省く）が解決された際にも本質的に使われたことや，量子群（の半分）を圏論化する箙ヘッケ環（コバノフ・ラウダ・ルキエ環, KLR 代数）を通じて，対称群代数が次数付可能であることが最近示されたことは重要な応用と考えられている．

対称群のモジュラー既約表現の次元を求めよという素朴な問題は，先に説明した圏論化によるリー環論との関連によれば，「対称群の既約モジュラー表現が，圏論化を通じてアフィン・リー環の基本可積分加群上に与える（ベレンシュタイン・カジュダンの意味での）完全基底を決定せよ」という，より洗練されたリー環論の問題に帰着される．これは未解決なものの，対称群代数の量子類似と考えられているＡ型岩堀・ヘッケ環については同じ問題の美しい解答が知られている．複素数体上で量子標数をｐと設定すると，それは A^{(1)}_{p-1}型アフィン量子群の基本可積分加群上のルスティック・柏原による双対標準基底（の特殊化）に一致する（LLTA 理論）．このような一見異なる数学理論の対応を，ヘッケ環を通じて発見，確立することはそれ自体興味深い問題と言え，さらにその証明は代数幾何学，代数解析学，組み合わせ論，リー環論等の美しい応用となっている．

２．研究の目的

私の研究テーマは，リー環論の深化とその応用である．リー環は対称性と関連して古くから研究されているが，圏論化を通じて，（ヘッケ環などの）対称群に関連する代数のモジュラー表現論とも密接に関係している．本研究では，このような一見異なる理論の対応を確立すること，そしてその対応によって初めて証明が与えられる深い応用を念頭において，まずは私の学位論文の延長上にある，捩じれ sl2 圏論化の定式化による導来圏同値の導出，およびスピン対称群に対するブルエ予想の解決に取り組む．

３．研究の方法

私が柏原正樹氏（京都大学）とソク・ジン・カン氏（ソウル大学）と共同で導入した、箙ヘッケ超代数の研究を発展させる。いくつか未発表のものもあるので，詳細をここにすべて書くことはしない．

４．研究成果

①スピン対称群のブルエ予想の証明に必要な特殊ブロックの解析を通じて、有名なシューア分割定理（1926 年）の任意奇数への一般化が得られた（渡部正樹氏との共同研究)。これによって、スピン対称群のモジュラー既約表現の古くから期待されていたラベル付けが得られた。これらをさらに発展させることで，分解行列の三角性などのスピン対称群のモジュラー表現論についての未解決問題にも取り組むことは今後の課題である．

②バーミンガム大の Evseev 氏と共同で、対称群のカルタン行列を圏論化の手法で解析し、KOR 予想の高次元化（量子化）を提唱した。その支持材料として、0 でない有理数 v についてわれわれの予想を示した。v=1 が KOR 予想なので、これは KOR 予想の一般化である。この結果は，元の KOR 予想を一般的に解いているという点で強力だが，圏論化という現代的な観点からモジュラー表現論とリー環論の双方に新しい視点を持ち込めたことが，今後重要だと考えている．実際,「KOR 予想（純粋に群指標論的な命題）に量子化・高次元化が存在しうる」ということは，モジュラー表現論側からはまず考え付くことがない．一方で，リー環論側からわれわれの予想をみると，「量子群のシャポヴァロフ形式のグラム行列には二次元の環である Z[v,1/v] でも単因子が存在する」というもので，やはり純粋なリー環論の考察のみでは到達できない．さらに，われわれの予想は，「M.Khovanov, S.Cautis, A.Licata らによって現在研究が進んでいるハイゼンベルグ代数の圏論化や,圏論的ボゾン・フェルミオン対応がその解決に関わるのでは」との指摘を複数の研究者から受けており，いくつかの圏論的表現論に関係する話題になる可能性も秘めている．

③ ICM Satellite 会議 "Representation Theory and Related Topics" で K.Misra 教授（米ノースカロライナ州立大）が発表した予想（arXiv:1309.4969）を一般化して解決した（東大数理の渡部正樹氏と共同）．具体的には，A^{(1)}_{n}, A^{(2)}_{2n}, D^{(2)}_{n+1}型アフィン・リー環の高レベル可積分最高ウェイト表現の極大ウェイト重複度を「特定の部分パターンを含まない文字列の数と等しい」という形で決定した．証明には，柏原クリスタル理論（特に，有木進

氏と V.Kreiman 氏との共同研究によるテンソル積クリスタルの特徴づけ「Susumu Ariki, Victor Kreiman and Shunsuke Tsuchioka, On the tensor product of two basic representations of Uv(\hat{sl}_e), Adv.Math.,218 (2008) 28--86」が役割を果たす．リー環論におけるウェイト重複度の研究は，組合せ論的表現論の中でも特別な位置を占めている．実際，ヤング図形などの由緒正しい代数的組合せ論の対象は，この数え上げに直接関係している．「特定の部分パターンを含まない文字列の数と等しい」という形は，代数的組合せ論的な広がりを示唆しており，本論文の結果の他のディンキン型への拡張が Kim-Oh(arXiv:1601.06685), Kim-Lee-Oh（arXiv:1703.10321）などで論じられている．

④箙ヘッケ超代数の論文（ソク・ジン・カン氏と柏原正樹氏との共同研究）を出版した．本論文では，KLR 代数をさらに一般化し，超表現論に適用できる基礎理論を構築した．KLR 代数の導入は圏論的表現論・高次元表現論における groundbreaking な達成であった．そのよく知られた応用の１つに，正標数上の対称群の群代数が次数付け可能であるという定理（Brundan-Kleshchev(Invent.Math.,(2009)),Rouquier(arXiv:0812.5023)）がある．スピン対称群 A^{(2)}_{2n}型リー環論的対象を圏論化することから，A^{(2)}_{2n}型 KLR 代数を用いることで，スピン対称についても同様の結論が得られ，さらにモジュラー表現論へも応用できるだろうと研究当初は考えられていた．この論文では，この期待の反例を挙げるところから出発し，パリティ付のディンキン図形について KLR 代数を定義し直した（以下，箙ヘッケ超代数）．われわれの定義が正しいものであるという正当化の１つが「適切なパリティ付 A^{(2)}_{2n}型箙ヘッケ超代数は正標数上のスピン対称群の群代数と森田同値になる」という主定理である．さらに箙ヘッケ超代数は「任意の既約超加群をただの加群だと思っても既約性が保たれる」などのよい性質をもっている．現在，われわれの導入した箙ヘッケ超代数は，現代的な圏論的表現論の視点によって得られた対象でありながら，スピン対称群やクイヤー・リー環 q(n) などの古典的な対象の表現論を展開するうえで本質的なものだと考えられている．実際，最近でもクイヤー・リー環のカジュダン・ルスティック型定理に大きな進展があったが（Brundan-Davidson, arXiv:1702.05055），その証明でも箙ヘッケ超代数が主要な役割を果たす．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　４件）

① Shunsuke Tsuchioka, Graded Cartan determinants of the symmetric groups, Trans.Amer.Math.Soc. 366 (2014) 2019--2040

② Seok-Jin Kang, Masaki Kashiwara and Shunsuke Tsuchioka, Quiver Hecke superalgebras, Journal für die reine und angewandte Mathematik 711 (2016) 1--54

③ Anton Evseev and Shunsuke Tsuchioka, On graded Cartan invariants of symmetric groups and Hecke algebras, Mathematische Zeitschrift 285 (2017) 177--213

④ Shunsuke Tsuchioka and Masaki Watanabe, Pattern avoidance seen in multiplicities of maximal weights of affine Lie algebra representations, Proceedings of the American Mathematical Society に掲載予定

〔学会発表〕（計　５件）

① Shunsuke Tsuchioka, 「On a general Schur's partition theorem」, Algebra Seminar Programme, School of Mathematics, University of Birmingham（英国）, 2015 年 10 月

② Shunsuke Tsuchioka, 「On graded Cartan invariants of symmetric groups and Hecke algebras」, Conference on Cluster Algebras and Representation Theory, KIAS（韓国）, 2014 年 11 月

③ Shunsuke Tsuchioka, 「On a general Schur's partition identity」, Categorical Representation Theory and Combinatorics, KIAS（韓国）, 2015 年 12 月

④ 土岡俊介，「一般 Schur 分割定理と対称群のモジュラースピン表現論」，大岡山談話会，東京工業大学，2016 年 6 月

⑤ 土岡俊介，「KOR 予想の広がり」，日本数学会秋季総合分科会代数学セッション特別講演，京都産業大学,2015 年 9 月

〔図書〕（計　３件）

① トム・レンスター著、斎藤恭司監修、土岡俊介訳『ベーシック圏論』（丸善出版），2017 年 1 月発刊

② 土岡俊介，シューア分割定理，数学セミナー2017 年 2 月号 28-36 ページ

③ 書籍『圏論の歩き方』（日本評論社）の第

14 章「表現論と圏論化（土岡俊介）」を寄稿，2015 年 9 月発刊

〔産業財産権〕

○出願状況（計　　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計　　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織
(1)研究代表者
土岡　俊介（TSUCHIOKA，Shunsuke）
東京大学大学院数理科学研究科特任助教
研究者番号：00585010

(2)研究分担者
(　　　)

研究者番号：

(3)連携研究者
(　　　)

研究者番号：

(4)研究協力者
(　　　)