様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ３０ 年　 ５ 月 ３１ 日現在

機関番号：１３３０１
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2014～2017
課題番号：２６８０００６

研究課題名（和文）アーサー跡公式の幾何サイドの研究と明示的跡公式への応用

研究課題名（英文）The geometric side of the Arthur trace formula and applications to explicit trace formulas

研究代表者
若槻　聡（Wakatsuki, Satoshi）

金沢大学・数物科学系・准教授

研究者番号：１０４３２１２１

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,900,000円

研究成果の概要（和文）：保型形式とはリー群の算術商上のラプラシアン固有関数のことをいう。保型形式は長い研究の歴史を持っており、整数論において中心的な役割を担ってきた。本研究では、特に重要な保型形式の一種である正則ジーゲル保型形式の研究を行った。そして、それらの存在の量を知ることができる一般的かつ明示的な次元公式を得ることに成功した。また次元公式や保型形式の研究に必要とされる跡公式の理論においても研究を行い、成果を得ることができた。

研究成果の概要（英文）：Automorphic forms mean Laplacian eigenfunctions on arithmetic quotients of Lie groups. There is a long history of studies for automorphic forms, and they play important roles in the number theory. In this study, we treated holomorphic Siegel modular form, which is a kind of important automorphic forms. We established a general and explicit dimension formula, by which one can know amounts of their existences. Furthermore, we studied the trace formula, which is necessary for studies of dimension formula and automorphic form, and we obtained some results for it.

研究分野：整数論

キーワード：整数論　保型形式　ジーゲル保型形式　次元公式　跡公式

１．研究開始当初の背景

近年の整数論の分野では保型形式と保型表現に関連する様々な対応の研究（ラングランズ予想やアーサー予想など）が大きく進展している。そのような対応の研究によって様々な問題が解決されており、現在においても保型形式は整数論における中心的な研究対象のうちの一つである。一方で整数論と保型形式の理論の発展のためには対応の研究だけでは不十分で、保型形式の空間上のヘッケ作用素の固有値やその跡などの具体的な数値や量に関する研究が極めて重要である。そのため、本研究ではアーサー跡公式を用いることで、そのような具体的な数値や量を明らかにすることを目的としていた。

２．研究の目的

アーサー跡公式は一般の連結簡約代数群について定式化されており、その主な目的は上述の保型表現の対応を研究するためであった。しかし、アーサー跡公式の幾何サイドに大きな改良を行うことで、ヘッケ作用素の固有値の跡の数値や量を研究できようになることが知られている。

一般の連結簡約代数群のアーサー跡公式の幾何サイドは重み付き軌道積分の一次結合によって表される。群の階数が２以上の場合に、その一次結合における重み付き軌道積分の係数（大域係数と呼ばれる）に概均質ゼータ関数による記述を与え、そしてヘッケ作用素の明示的跡公式の研究に応用することが本研究の目的であった。具体的な目標の一つは、一般階数の斜交群に関する大域係数の問題を解決することである。もう一つの具体的な目標は一般階数の斜交群の大域係数の研究の応用として、レベルが３以上の主合同部分群に対する正則ジーゲルカスプ形式の空間に関する明示的次元公式の予想を解決することである。

３．研究の方法

本研究の目的は階数２以上の代数群に対して重み付き軌道積分の大域係数に概均質ゼータ関数による記述を与え、そして明示的跡公式の研究へ応用することである。それらの達成のために以下の研究に取り組んだ。

イ）一般次数の正則ジーゲルカスプ形式の明示的次元公式の予想の証明

ロ）一般階数の一般線形群に関する大域係数の問題の研究

ハ）一般階数の斜交群に関する大域係数の問題の研究

ニ）階数２の斜交群に関する大域係数の研究の応用

これらの研究はそれぞれ部分的にはアーサー跡公式の専門家であるFinis氏とHoffmann氏、明示的跡公式の専門家である伊吹山氏との共同研究として取り組んでいた。

４．研究成果

（１）本研究における最も主要な研究成果は、上述した(イ)のレベルが３以上の主合同部分群に対する正則ジーゲルカスプ形式の空間に関する明示的次元公式の予想を完全に解決したことである。次元は自明な作用素の跡であり、一般的な次元に対して綺麗な公式が存在していることが明らかとなった。跡公式は表現論的な設定を加えることで単純な形になることが知られているが、今回の現象は正則離散系列表現に対するものであり、これまでには無かった単純跡公式とも言える。また予想の証明では大域係数の研究を経由しておらず、当初の計画とは異なる証明となったが、跡公式に関する新たな知見を得ることになった。

以下、その予想の公式について説明する。n を次数、N をレベルとし、k を重さとする。これら三つのパラメータに対して、ジーゲルカスプ形式の空間 $S_k(\Gamma_n(N))$が定義される。本研究において証明されたのは、下記の次元 $\dim S_k(\Gamma_n(N))$に関する公式である。公式を通じて、リーマンゼータ関数$\zeta(s)$の特殊値および新谷ゼータ関数$\zeta_{Shin}(s)$の特殊値により、次元が記述されていることが分かる。現れる$\zeta(s)$の特殊値はベルヌーイ数で与えられ、具体的に計算可能である。また新谷ゼータ関数$\zeta_{Shin}(s)$の特殊値も伊吹山-斎藤の明示的公式により特殊値がベルヌーイ数で記述されるため、具体的に計算可能である。したがって、公式の右辺は任意のパラメータn, N, kに対して具体的な数値を与えることができる。さらに、それらのパラメータに対する次元の漸近挙動も公式から明らかにすることができる。

$$
\begin{aligned}
\dim S_k(\Gamma_n(N)) &= [\Gamma_n(1):\Gamma_n(N)] \\
&\quad \times \sum_{r=0}^{n} \zeta_{\mathrm{Shin}}(L_r^*, r-n) \times 2^{r-r^2+rn} N^{\frac{r(r-1)}{2}-rn} \\
&\quad \times \prod_{j=1}^{n-r} \frac{(-1)^j (j-1)!}{(2j-1)!} \zeta(1-2j) \\
&\quad \times 2^{-2n+r} \prod_{t=1}^{n-r} \prod_{u=t+r}^{n} (2k-t-u),
\end{aligned}
$$

$$
[\Gamma_n(1):\Gamma_n(N)] = N^{n(2n+1)} \prod_{p:\mathrm{prime},\, p|N} \prod_{l=1}^{n} (1-p^{-2l}).
$$

（２）(ロ)(ハ)の大域係数の研究に関しては当初の計画とは異なるが、例外群G_2に関する跡公式の大域係数と２元３次形式の空間に関連する概均質ゼータ関数を関係付けることに成功した。一般線形群と斜交群に関する大域係数の研究は完全な解決には至らなかったが、Chaudouard 氏の研究を基にすることで新たな研究手法を手に入れた。この手法よって、目的の達成に向けた今後の研究につながるような研究の進歩を得ることができ

た。

（３）(ハ)の応用については、当初の計画と多少異なるが、ヘッケ固有値の漸近分布の研究に応用することに成功した。この研究では跡公式の幾何サイドを明示的に記述する必要があり、実際に大域係数の研究を役立てることに成功した。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計０件）

〔学会発表〕（計１２件）
① 若槻　聡, A trace formula on $\SL(3,\Z)\backslash \SL(3,\R)/\SO(3)$, 京都大学 数学教室 談話会, 3 号館 110 講演室, 2017 年 11 月 29 日.
② 若槻　聡, A trace formula on $\SL(3,\Z)\backslash \SL(3,\R)/\SO(3)$, Zeta functions and trace formulas in Fukuoka, Lecture Room M W1-C-513 , West Zone 1, Ito campus, Kyushu University, 2017 年 10 月 13 日.
③ 若槻　聡, A trace formula on $\SL(3,\Z)\backslash \SL(3,\R)/\SO(3)$, Special values of automorphic L-functions, periods of automorphic forms and related topics, 大阪市立大学　理学部 E 棟 E408, 2017 年 9 月 20 日.
④ 若槻 聡, Equivariant subconvex bounds for Hecke-Maass forms, 第 4 回京都保形形式研究集会, 京都大学, Graduate School of Science Bldg No.3 Rm 110, 2017 年 6 月 17 日.
⑤ 若槻 聡, Equivariant subconvex bounds for Hecke-Maass forms, 神戸整数論集会 2017, 神戸大学, 神戸大学六甲台第二キャンパス理学研究科, 理学研究科 B 棟 B301 号室, 2017 年 6 月 8 日.
⑥ 若槻 聡, 重さが 0 でないマース形式の上限ノルム, 東北大学代数セミナー, 東北大学 大学院理学研究科 数学棟 305 号室, 2017 年 1 月 12 日.
⑦ 若槻 聡, ジーゲル保型形式の次元公式, 大阪大学数学教室 談話会, 大阪府豊中市待兼山町１-１ 理学棟 E404, 2016 年 10 月 17 日（月）16:30--17:30.
⑧ 若槻 聡, The dimensions of spaces of Siegel cusp forms of general degree, TSUDA COLLEGE AND OIST JOINT WORKSHOP ON CALABI-YAU VARIETIES:ARITHMETIC, GEOMETRY AND PHYSICS, AUGUST 1--3 2016, Organized by Noriko Yui (Queen's University) and Takayuki Oda (OIST), Tokyo University Komaba Campus Room 117, 2016 年 8 月 3 日.
⑨ 若槻 聡, ジーゲル保型形式の次元公式, 筑波大学, 日本数学会, 企画特別講演, 2016 年 3 月 19 日.
⑩ 若槻 聡, The dimensions of spaces of Siegel cusp forms of general degree, 2016 Korea-Japan Joint Number theory Seminar （日韓整数論セミナー）, Department of Mathematics Room 404, POSTECH, Pohang, South Korea, 2016 年 2 月 2 日.
⑪ 若槻 聡, The dimensions of spaces of Siegel cusp forms of general degree, Part I, Part II, Workshop "Moduli spaces of abelian varieties and curves, and related analysis", Gradauate School of Mathematical Sciences, the Univ. of Tokyo, Room 002, 2015 年 12 月 17 日.
⑫ 若槻 聡, The dimensions of spaces of Siegel cusp forms of general degree, 3nd Kyoto conference on automorphic forms, Kyoto University, Graduate School of Science Bldg No.3 Rm 110, 2015 年 6 月 26 日.

〔図書〕（計０件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計０件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計０件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
若槻　聡, ジーゲル保型形式の次元公式, 総合講演・企画特別講演アブストラクト, ２０１６年度日本数学会, 79--89.

ホームページ等
http://www.geocities.jp/sawakatsuki2016/

６．研究組織
(1)研究代表者
若槻　聡（WAKATSUKI SATOSHI）
金沢大学・数物科学系・准教授
研究者番号：10432121

(2)研究分担者
(　　　)

研究者番号：

(3)連携研究者
(　　　)

研究者番号：

(4)研究協力者
(　　　)