様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ３０ 年　 ６ 月 １７ 日現在

機関番号：１３５０１

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2014～2017

課題番号：２６８００００７

研究課題名（和文）傾理論を軸とする岩永-Gorenstein環の表現論的研究

研究課題名（英文）Representation theory of Iwanaga-Gorenstein rings from the viewpont of tilting thoery

研究代表者

山浦　浩太（YAMAURA, Kota）

山梨大学・大学院総合研究部・助教

研究者番号：６０６３３２４５

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,600,000円

研究成果の概要（和文）：本研究の目的は、傾理論を用いて次数付き岩永-Gorenstein環上の次数付きCohen-Macaulay加群の安定圏を解析することである。主な研究成果を以下に挙げる。
1. 1次元次数付き可換Gorenstein環に対し、ある仮定の下で、次数付き単純加群のsyzygyが生成する安定圏の三角部分圏に準傾対象が存在することを示した。また、その三角部分圏に傾対象が存在するための必要十分条件を与えた。
2. 体上の岩永-Gorenstein自明拡大代数に対し、ある仮定の下で、次数付きCohen-Macaulay加群の安定圏が0次部分代数上の有限生成加群圏の導来圏の許容部分圏として実現できることを示した。

研究成果の概要（英文）：The purpose is to study the stable category of graded Cohen-Macaulay modules over graded Iwanaga-Gorenstein rings from the viewpoint of tilting theory. We have the following results.
1. For a one dimensional graded commutative Gorenstein ring A with some assumptions, the thick subcategory generated by the syzygies of graded simple modules in the stable category of graded Cohen-Macaulay A-modules has a silting object. Moreover, the thick subcategory has a tilting object if and only if either A is regular or the a-invariant of A is non-negative.
2. Let R be an algebra over a filed and C be a bimodule. Assume that the trivial extension A of R by C is Iwanaga-Gorenstein. Then the stable category of graded Cohen-Macaulay A-modules can be realized as an admissible subcategory of the bounded derived category of the category of finitely generated R-modules if the global dimension of R is finite.

研究分野：環の表現論

キーワード：岩永-Gorenstein環　Cohen-Macaulay加群　三角圏　傾理論

１．研究開始当初の背景

（１）ネーター環 A が岩永-Gorenstein 環であるとは、A を加群して見たときに、左右の入射次元が有限であるときをいう。岩永-Gorenstein 環 A の表現論では（極大）Cohen-Macaulay 加群が主要な研究対象である。Cohen-Macaulay 加群の圏 CM(A)は Frobenius 圏であり、その安定圏 $\underline{\mathrm{CM}}$(A)には三角圏の構造が入る。そのため、三角圏の理論を用いた CM(A)の構造解析が可能であり、多くの研究者によって研究が進められてきた。

1980 年代、Happel により、安定圏が環上の加群圏の導来圏として実現可能であることが示された。体上の有限次元代数 R に対し、その双対空間による自明拡大をとることで次数付き自己入射代数 A が構成できる。Happel は「R の大域次元が有限であることと、次数付き A 加群の安定圏が R 上の導来圏と三角圏同値であることは同値である」ことを証明した。

この結果により、自己入射代数の表現を異なる環の表現の見地から研究することが可能となり、特に有限表現型自己入射代数の研究に多大な影響を与えた。この事実から、安定圏を導来圏によって実現することは、環の表現論において重要な問題であると考えられる。

（２）2012 年頃、研究代表者の山浦は Happel の結果を傾理論の観点から捉え直し、一般の自己入射代数に対する結果に拡張した。すなわち、非負整数次数付き自己入射代数 A に対して「次数付き A 加群の安定圏がある環上の導来圏と三角圏同値である必要十分条件は、A_0 の大域次元が有限であること」を示した。

十分性の証明では、ある次数付き A 加群 T が安定圏における傾対象となり、その準同型環の大域次元が有限であることを示した。このとき傾理論の帰結として、安定圏は傾対象の準同型環上の導来圏と三角圏同値であることが従う。

上記の他にも、多くの研究者により、様々な次数付き岩永-Gorenstein 環に対して、次数付き Cohen-Macaulay 加群の安定圏と環上の導来圏との三角圏同値が傾理論を用いて示されている。

２．研究の目的

背景で述べた先行結果の一般化として、次数付き岩永-Gorenstein 環上の次数付き Cohen-Macaulay 加群の安定圏を環上の導来圏として実現する手法を構築することが本研究の目的である。背景（２）に従い、手法の中心には傾理論を据えて研究する。具体的には、次の項目を調べる。

以下では A を非負整数次数付き岩永-Gorenstein 環とする。

（１）A 上の次数付き Cohen-Macaulay 加群の安定圏 gr$\underline{\mathrm{CM}}$(A)が傾対象を有する必要十分条件を調べる。この必要十分条件を計算可能な数値的条件で与えることができれば、具体的な A に対して、傾対象の存在性を容易に判定することが可能となる。

（２）gr$\underline{\mathrm{CM}}$(A)に傾対象が存在した場合、その準同型環の構造やホモロジー的性質を調べる。これにより、gr$\underline{\mathrm{CM}}$(A)と傾対象の準同型環上の導来圏が三角圏同値であるかどうかを調べる。

（３）研究（１）（２）の応用として、A 上の Cohen-Macaulay 加群の安定圏 $\underline{\mathrm{CM}}$(A)と傾対象の準同型環上の導来軌道圏の間の三角圏同値の構成について検討を行う。

３．研究の方法

岩永-Gorenstein 環の例に対して安定圏 gr$\underline{\mathrm{CM}}$(A)の計算を行い、研究目的を達成するための足がかりを模索した。

関連する内容を調べている研究者と電子メールにより意見交換を行いながら研究を進めた。また、必要に応じて互いの所属機関に出張し、直接議論を行なった。研究集会への参加や文献の調査を行うことで情報を収集し、本研究を遂行する上での参考とした。また、岩永-Gorenstein 環や三角圏に関連する話題を紹介するセミナーを上山氏と共同開催し、情報収集や意見交換を行なった。

４．研究成果

（１）入射次元が d である体上の有限次元岩永-Gorenstein 代数 A について研究を行なった。特に１．（２）で述べた結果の部分的な一般化である「A_0 の大域次元が有限ならば、T の d 番目の syzygy であるΩ^d(T)が gr$\underline{\mathrm{CM}}$(A)の傾対象となる」という予想を立て、これが成立するか否かを検証した。

ここで T は１．（２）において安定圏の傾対象であった次数付き A 加群である。一般に T は Cohen-Macaulay 加群ではないため、代わりとして T の syzygy をとることで得られる Cohen-Macaulay 加群Ω^d(T)を考え、これが gr$\underline{\mathrm{CM}}$(A)の傾対象を与えると予想した。

本研究開始以前、源氏との共同研究により、A の次数付き極小入射分解における各項のソークルが全て同一の次数に集中しているという仮定の下で、上述の予想が正しいことを示しており、研究当初、予想は正しいと考えていた。しかしながら d=1 の場合の研究により、以下の知見を得た。

① 非 Dynkin 型前射影代数の余有限傾イデアルによる剰余環は d=1 の岩永-Gorenstein 代数であることが、Buan-Iyama-Reiten-Scott

により示されている。また、この代数には 0 次部分代数の大域次元が有限となる次数構造が入る。このクラスに対して、予想の成否を検証した。

木村氏との議論により、余有限傾イデアルが次数１以上の元により生成されるという非常に弱い仮定の下で、予想が正しいことを証明した。

他方で、このクラスの中に予想の反例が見つかり、予想は否定的に解決された。ただし、その反例においても、Ω(T)以外の加群が安定圏における傾対象となっており、安定圏はある環上の導来圏と三角圏同値であった。

② ①により予想は否定的に解決されたが、d=1 のときは予想よりやや弱い主張が成立する。源氏との議論により、d=1 で A_0 の大域次元が有限であるならば Ω(T)は grCM(A)における準傾対象であることを示した。さらに、A のソークルが同一の次数に集中しているとき、Ω(T)は grCM(A)における傾対象であることを示した。前半の結果は残念ながら Zhu-Lu が先に発表している。

準傾対象は傾対象を含む概念であり、既存の準傾対象から別の準傾対象を構成する手法である変異理論が、Aihara-Iyama により構築されている。これより準傾対象 Ω(T)に有限回の変異を施すことで grCM(A)における傾対象が得られるであろうか、という問題が提起される。この問題について、解決の糸口を見つけられないまま現在に至っている。

d=2 のとき、Ω^2(T)は grCM(A)の準傾対象であるとは限らないことを注意しておく。

（2）入射次元が 1 である可換 Gorensetin 環について研究した。本研究開始以前、標準次数付き 1 次元超曲面 A に対し、grCM(A)における傾対象の有無について、伊山氏、高橋氏と議論を行なった。その結果、一般に grCM(A)に傾対象は存在しないが、grCM(A)の三角部分圏である grCM0(A)において傾対象が存在することが判明していた。ここで grCM0(A)とは、punctured spectrum で局所自由な Cohen-Macaulay A 加群のなす三角圏である。

本研究では上記の結果を、より一般に拡張することに成功した。すなわち、A を非負整数次数付き可換 Gorenstein 環とする。A_0 が体であり、A の入射次元が 1 であると仮定する。この仮定の下、安定圏 grCM0(A)における傾対象について研究し、以下に述べる主結果を得た。

① 安定圏 grCM0(A)に準傾対象 V が存在することを示した。この準傾対象 V は1.（2）で述べた傾対象 T と類似の構成により与えられる。

② 安定圏 grCM0(A)に傾対象が存在する必要十分条件は A が正則環であるか、または A の a 不変量が非負であることを示した。この同値条件が成り立つとき、①の V は傾対象となり、傾理論の帰結として grCM0(A)は V の準同型環上の射影加群の有界複体のなすホモトピー圏と三角圏同値となる。また、V の準同型環は有限次元岩永-Gorenstein 代数であることを示した。

さらに、A の a 不変量が非負であるとき、A が被約であることと、V の準同型環の大域次元が有限であることは同値であることを示した。このとき、grCM0(A)は V の準同型環上の導来圏と三角圏同値となる。

以上は伊山氏、Buchweitz 氏との共同研究により得られた主な成果であり、現在は論文として学術誌に投稿する準備をしている。

（3）体上の代数 R とその両側加群 C から構成される自明拡大代数を A とする。A には 0 次部分代数が R となる次数構造が入る。自明拡大代数 A の入射次元の有限性および Cohen-Macaulay 加群を次数構造の観点から研究し、以下に述べる主結果を得た。

① A 上の次数付き入射加群の複体の構造を R と C の言葉で記述した。その応用として、A が岩永-Gorenstein 代数である必要十分条件を、C の導来 Hom 関手および導来テンソル関手による条件で与えた。

② R が岩永-Gorenstein 代数であるという仮定の下、①で示した必要十分条件の圏論的解釈を与えた。すなわち、「①で示した条件は R 上の射影加群の有界複体のなすホモトピー圏 K^b(R)の許容部分圏 E で、C の導来テンソル関手が E の自己同値を与えており、E の右直交圏には冪零に作用するものが存在することと同値である」ことを示した。

③ R と A が岩永-Gorenstein 代数であると仮定する。このとき、Buchweitz, Happel による R 上の導来圏から安定圏への自然な三角関手

f: D^b(modR) → grCM(A)

を通して導来圏と安定圏の比較を行った。

f の制限により、②の許容部分圏 E は A 上の局所完全次数付き Cohen-Macaulay 加群の安定圏 grCMlp(A)と三角圏同値となることを示した。ここで次数付き A 加群 M が局所完全であるとは、M を R 上の加群とみて射影次元有限であることを意味する。また、E の右直交圏は Ker(f)と一致する。以上より半直交分解 K^b(R)=grCMlp(A)⊥ Ker(f)が得られる。

特に R の大域次元が有限であるとき、D^b(modR)=K^b(R), grCMlp(A)=grCM(A)であり、grCM(A)は D^b(modR)の許容部分圏として実現される。この結果は安定圏を導来圏として実現するという本研究の目的に準ずるものであり、岩永-Gorenstein 環の研究におけ

る大きな進展である。
以上は源氏との共同研究により得られた主な成果であり、現在は論文を執筆している最中である。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔学会発表〕（計 3 件）

（１） Kota Yamaura，正次数付き岩永-Gorenstein 代数について，第７回（非）可換代数とトポロジー，2017 年 2 月 21 日

（２） Kota Yamaura，Iwanaga-Gorenstein algebras of perfect style，Derived categories of finite dimensional algebras Conference honoring Hideto Asashiba on the occasion of his 60th birthday，2015 年 9 月 11 日.

（３） Kota Yamaura，Tilting theory for one dimensional hypersurfaces，Advances in Representation Theory of Algebras，2014 年 6 月 20 日.

〔その他〕
ホームページ
http://www.ccn.yamanashi.ac.jp/~kyamaura/index.html

６．研究組織

(1)研究代表者
山浦　浩太（YAMAURA，Kota）
山梨大学・大学院総合研究部・助教
研究者番号：60633245