

平成 30 年 4 月 25 日現在

機関番号：13903

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2014～2017

課題番号：26800010

研究課題名(和文) 数論的トポロジーに基づく岩澤理論の新展開

研究課題名(英文) New developments of Iwasawa theory based on arithmetic topology

研究代表者

水澤 靖 (Mizusawa, Yasushi)

名古屋工業大学・工学(系)研究科(研究院)・准教授

研究者番号：60453817

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,500,000円

研究成果の概要(和文)：当研究課題の主な目的は、代数体の分岐条件付ガロア群の岩澤理論的な構造および不変量を、数論的トポロジーの視点から解明することにより、岩澤理論の発展に貢献することであった。その成果として、分岐条件付副 $p$ 拡大のガロア群の非可換構造を、様々な状況で記述した。特に、 $p$ 上分岐が円分的に制限された分岐条件の下で、そのガロア群を絡み目群の類似として記述するとともに、その非可換構造から岩澤理論的な不変量も計算した。

研究成果の概要(英文)：The main purpose of this research is a contribution to Iwasawa theory from a view point of arithmetic topology. The main objects are the structural invariants of Galois groups of number fields with restricted ramification. This research provided various description of the nonabelian structure of pro- $p$  Galois groups. In particular when the ramification at  $p$  is restricted cyclotomically, some invariants in Iwasawa theory were computed from the nonabelian structure of the Galois groups which are described as analogues of link groups.

研究分野：代数的整数論

キーワード：岩澤理論 数論的トポロジー 馴分岐 ガロア群

## 1. 研究開始当初の背景

高次の代数体における素因数分解の複雑さを表す「イデアル類群」は、代数的整数論の主要研究対象である。そのイデアル類群の  $p$ -シロー部分群は、不分岐副  $p$  ガロア群のアーベル商と同一視される。岩澤理論では、これらの研究が「 $Z_p$  拡大」の上で展開されるが、特に「総実  $Z_p$  拡大上の不分岐副  $p$  ガロア群のアーベル商 (不分岐岩澤加群) は有限」と主張する Greenberg 予想は、現在でも重要な未解決問題の一つとして残っている。Ozaki の理論に代表される「非アーベル岩澤理論」の研究においても、 $Z_p$  拡大上の不分岐副  $p$  ガロア群は馴分岐副  $p$  ガロア群の部分商として捉えられ、それらの非可換構造の記述が追求されてきたが、そこでの困難も Greenberg 予想に起因することが多い。その困難の回避策 (Greenberg 予想への新たなアプローチ) の模索として、数論的トポロジー (素数と結び目の類似性、特に Morishita の理論) に着目するに至った。

## 2. 研究の目的

そこで当研究課題では、

- ・ 分岐条件付副  $p$  ガロア群と絡み目群との類似性
- ・ 岩澤多項式と Alexander 多項式との類似性

を非アーベル岩澤理論として追求、発展させることを目的として研究を行った。その目的を達成するためには、分岐条件付副  $p$  ガロア拡大に  $Z_p$  拡大を含めなければならないため、 $p$  での分岐を認めた分岐条件を考えることになる。一方、 $p$  での分岐を無条件に認めると、分解群とペリフェラル群との類似性が弱まるため、十分に類似性を追求することが難しい。そこで特に、代数体  $k$  の円分  $Z_p$  拡大  $K$  上の馴分岐副  $p$  拡大  $L$  に対して、その  $k$  上のガロア群  $\text{Gal}(L/k)$  を絡み目群の類似として設定し、その非可換構造を数論的不変量により記述することを主目標とした。さらにそれを応用して、岩澤多項式を Alexander 多項式のように計算、考察することも目標とした。

## 3. 研究の方法

主に以下の研究手法を取り入れるために、文献精読や数値実験、研究出張等を行った。

### (1) 非可換岩澤理論

目標のガロア群  $\text{Gal}(L/k)$  が含む  $p$  進 Lie 拡大の特徴 (特に非可換岩澤主予想) を手がかりに、その非可換構造を広く記述することができるのではないかと期待した。そこで、非可換岩澤理論の勉強会 (整数論サマースクール) を共同開催し、問題意識を広く共有するとともに、数論的トポロジーも含む、広い視

点からの研究協力を得ることができた。

### (2) 馴分岐副 $p$ 拡大の理論

絡み目群との類似性が強い馴分岐副  $p$  ガロア群については、その非可換構造の記述が比較的進んでいる。岩澤理論的なガロア群  $\text{Gal}(L/k)$  に対しても応用できることを期待して、その手法 (Boston-LeedhamGreen による O'Brien の  $p$  群生成アルゴリズムの応用、Labute, Schmidt による副  $p$  群の mild 性判定法) を取り入れた。そのために、計算機上で群論計算ソフトウェアの GAP を用いた。

### (3) ガロア群の副 $p$ 群表示

Shafarevich の理論に基づいて、ガロア群  $\text{Gal}(L/k)$  の副  $p$  群としての生成元と関係式の個数の公式が Salle により与えられ、Blondeau-Lebacque-Maire により整理されている。Gal(L/k)においては、 $p$  上の分解群もペリフェラル群に強く類似することに着眼し、Salleらの理論を、Koch, Morishita の理論に基づいて精密化した。

### (4) 岩澤多項式の近似計算

絡み目群の群表示から Alexander 多項式が計算されるように、ガロア群  $\text{Gal}(L/k)$  の副  $p$  群表示から岩澤多項式が計算できることは、Morishita の理論の中でも知られていた。その計算は副  $p$  Fox 微分に基づいているため、その手法を取り入れ、関係式の副  $p$  近似と岩澤多項式の近似計算との近似精度を比較した。また、数論ソフトウェアの PARI/GP を用いて、Alexander 多項式との類似性に関する数値実験も行った。

## 4. 研究成果

### (1) 実馴分岐副 2 拡大のガロア群

ガロア群  $\text{Gal}(L/k)$  の群表示の記述に先駆けて、絡み目群に類似するガロア群の関係式が (できれば分岐素点のモノドロミーを生成元として) 完全に記述される具体例を得たかった。そこで上記 3 (2) の手法を応用し、有理数体  $Q$  の最大  $S$  外不分岐副 2 拡大のガロア群の群表示が完全に記述される素数の 3 元集合  $S$  の大きな族を与えた。そのガロア群の交換子群列の長さは 3 であり、抽象群としても 2 つの生成元と 2 本の関係式で群表示される。そのような馴分岐副 2 ガロア群の例としては (生成元がモノドロミーかどうかは不明だが) 初めての例と思われる。これらの成果は、5 雑誌論文 で発表している。

### (2) 基本 $Z_2$ 拡大上の馴分岐副 2 ガロア群

非可換構造が最も簡単な場合として、

$\text{Gal}(L/k)$  の閉部分群  $\text{Gal}(L/K)$  が副 metacyclic になる状況を考察し、 $p=2$ ,  $k=\mathbb{Q}$  での完全な分類表を完成させた。この状況では、 $\text{Gal}(L/k)$  自身が 2 進 Lie 群であり、関係式が完全に記述される例や、コホモロジー次元が有限のものも無限のものも現れる。また、不分岐岩澤加群を  $\text{Gal}(L/K)$  の商として捉えることにより、Greenberg 予想が肯定的な(かつ  $\mathbb{Q}$  上非可換ガロアな)代数体の新しい例も導いている。さらに、この分類の整理の過程で、馴分岐副 2 ガロア群の副 metacyclic 性の一般的な判定基準も得ている。これらの成果は、5 雑誌論文 で発表している。

### (3) 代数体の副 $p$ "絡み目群"

上記 3 (3) の手法に基づいて、絡み目群の Milnor 群表示の類似として、ガロア群  $\text{Gal}(L/k)$  の Koch 型群表示を ( $k=\mathbb{Q}$  などの基本的な場合に) 与えた。これにより、仮定が冪剰余で記述される岩澤理論の種々の定理を、数論的トポロジーの言葉に翻訳する(もしくは、別証明を与える)ことができると思われる。また、 $\text{Gal}(L/K)$  を主対象とする非アーベル岩澤理論を、数論的トポロジーの視点から自然に捉えることもできるようになる。具体的な応用として、 $\text{Gal}(L/k)$  が mild 副  $p$  群(特にコホモロジー次元が 2)となる分岐条件(素数の "circular sets")も導かれる。さらに、Fröhlich, Koch のアイデアを介して、 $p=2$  での結果と上記 3 (4) の手法を結びつけ、具体的な岩澤多項式の近似計算に応用した。特に、2 が惰性する虚 2 次体の 2 次の岩澤多項式を(1 次の係数は 4 を、定数項は 8 を法として)冪剰余記号で記述した。これらの成果をまとめた下記の論文は、現在、学術雑誌に投稿中である。

Yasushi Mizusawa, On pro- $p$  link groups of number fields, preprint.  
<https://arxiv.org/abs/1707.00113>

この研究過程で得た知見は、5 雑誌論文 の共同研究でも活用することができた。

5 . 主な発表論文等  
 (研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 3 件)

Fumiya Amano, Yasushi Mizusawa, Masanori Morishita, On mod 3 triple Milnor invariants and triple cubic residue symbols in the Eisenstein number field, 査読有, Research in Number Theory, volume 4 (2018), Article 7.  
 DOI:  
[https://doi.org/10.1007/s40993-018-](https://doi.org/10.1007/s40993-018-0100-7)

[0100-7](https://doi.org/10.1007/s40993-018-0100-7)

Yasushi Mizusawa, Tame pro-2 Galois groups and the basic  $\mathbb{Z}_2$ -extension, Transactions of the American Mathematical Society, 査読有, volume 370 (2018), no. 4, 2423-2461.  
 DOI:  
<https://doi.org/10.1090/tran/7023>

Yasushi Mizusawa, On certain 2-extensions of  $\mathbb{Q}$  unramified at 2 and  $\mathbb{Z}_2$ , Osaka Journal of Mathematics, 査読有, volume 53 (2016), no. 4, 1063-1088.  
<https://projecteuclid.org/euclid.ojm/1475601833>

[学会発表](計 11 件)

Yasushi Mizusawa, On 2-adic L-functions and the pro-2 Fox derivative, 第 11 回ゼータ若手研究集会, (2018).

Yasushi Mizusawa, Pro- $p$  link groups in Iwasawa theory, Iwasawa 2017, (2017).

水澤 靖, 代数体の副  $p$  絡み目群について, 2017 早稲田整数論研究集会, (2017).

Yasushi Mizusawa, On pro- $p$  link groups of number fields, Low dimensional topology and number theory IX, (2017).

水澤 靖, 代数体の副  $p$  絡み目群について, 北陸数論研究集会 2016「中心拡大と埋め込み問題」, (2016).

水澤 靖, 代数体の副  $p$  絡み目群について, 新潟代数セミナー, (2016).

Yasushi Mizusawa, On certain 2-extensions of  $\mathbb{Q}$  unramified at 2 and  $\mathbb{Z}_2$ , Christian Maire 氏を囲んでの小研究集会, (2016).

Yasushi Mizusawa, Tame pro- $p$  Galois groups over cyclotomic  $\mathbb{Z}_p$ -extensions, Low dimensional topology and number theory VIII, (2016).

水澤 靖, 基本  $\mathbb{Z}_2$  拡大上の馴分岐 pro-2 ガロア群について, 日本数学会秋季総合分科会(代数学分科会), (2015).

水澤 靖, ある総実馴分岐 2-拡大のガロア群について, 日本数学会秋季総合分科会(代数学分科会), (2015).

水澤 靖, ある総実訓分岐 2-拡大のガ  
ロア群について, 愛知数論セミナー,  
(2014).

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 0 件)

取得状況(計 0 件)

〔その他〕

ホームページ等

<https://kaken.nii.ac.jp/grant/KAKENHI-PROJECT-26800010/>

## 6 . 研究組織

研究代表者

水澤 靖 (MIZUSAWA, Yasushi)

名古屋工業大学・大学院工学研究科・准教授

研究者番号 : 60453817